

CAP. 3. CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV

3.1. Circuite de curent alternativ monofazat

3.1.1. Producerea curentului alternativ monofazat.

Considerăm o spirală plasată într-un câmp magnetic omogen (fig.3.1). Dacă spira se rotește cu o viteză unghiulară ω constantă în jurul unei axe perpendiculare pe direcția liniilor de câmp magnetic, în spirală, în baza *legii inducției electromagnetice*, se obține o t.e.m. alternativă sinusoidală, deci și un curent alternativ. Fie α unghiul pe care îl face planul spirei cu un plan perpendicular pe liniile de câmp.

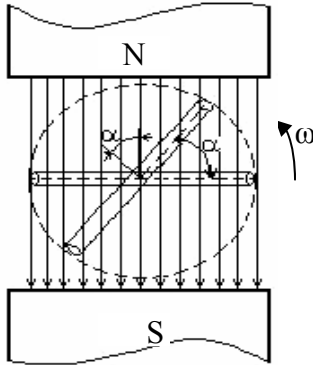


Fig.3.1

Dacă spira se rotește cu o viteză unghiulară ω constantă, la un moment oarecare t , unghiul α este dat de relația: $\alpha = \omega t + \varphi$, unde φ este unghiul format la $t=0$ între normala la planul spirei și direcția liniilor de câmp magnetic. În acest caz avem:

$$\Phi = \Phi_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.1)$$

T.e.m. indusă va fi: $e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega\Phi_m \sin(\omega t + \varphi) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$ (3.2)

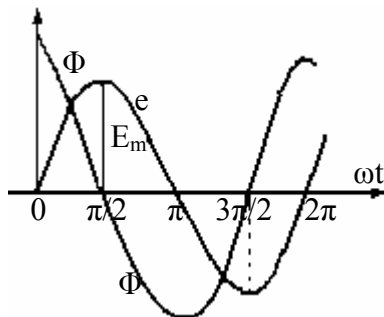


Fig.3.2

unde: $E_m = \omega\Phi_m = \omega BS$

În cazul când avem N spire care se rotesc,

$$E_m = NBS\omega \quad (3.3)$$

Rezultă de aici, că frecvența unghiulară a t.e.m. induse (pulsăția) este egală cu viteza unghiulară a spirei. În fig.3.2 sunt reprezentate curbele de variație a fluxului Φ și a t.e.m. pentru cazul $\varphi = 0$.

3.1.2. Perioada și frecvența curentului alternativ

Curentului alternativ poate avea forme de undă foarte variate. În fig.3.3a sunt prezentate formele: sinusoidală, dreptunghiulară și triunghiulară. Dacă se suprapune un curent alternativ, de o anumită formă, peste un curent continuu se obține un curent ondulatoriu (fig.3.3b). Dacă se suprimă o anumită alternanță a curentului alternativ, rămâne cealaltă alternanță care dă un curent pulsatoriu. În acest caz, curentul are același sens de scurgere, dar este cu întrerupere (fig.3.3c).

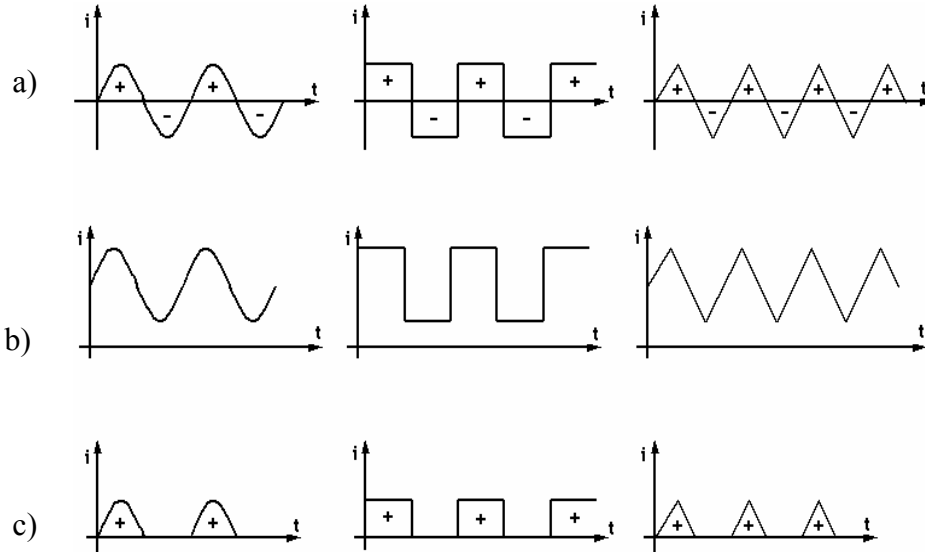


Fig.3.3

În curent alternativ toate mărimile (t.e.m., curent, tensiune) sunt variabile în timp. Prin convenție valorile pe care le au mărimile alternative la un moment dat t , se numesc valori instantanee sau momentane și se notează cu litere mici.

În tehnică se folosesc, de cele mai multe ori, tensiuni electromotoare, căderi de tensiune și curenți electrici ca mărimi periodice, de forma: $e=f(t)=f(t+T)=f(t+nT)$; $u=f(t)=f(t+T)=f(t+nT)$; $i=f(t)=f(t+T)=f(t+nT)$, unde n este un număr întreg oarecare, iar T este perioada principală a mărimii periodice. Inversul perioadei se numește frecvență, se notează cu f și se măsoară în Hz, adică:

$$f = \frac{1}{T} (\text{Hz}) \quad (3.4)$$

Gama frecvențelor utilizate în tehnică este foarte largă. Frecvența industrială standardizată pentru transportul și distribuția energiei electrice

este de 50Hz. În telefonie se utilizează frecvențe mărite (500-5000Hz). În electrotermie se folosesc frecvențe până la 10^6 Hz, iar în radiotehnică de ordinul $10^6 - 10^9$ Hz.

Funcțiile periodice care determină legile de variație a mărimilor din curentul alternativ, pot avea forme foarte complicate.

De cele mai multe ori mărimile din curentul alternativ (t.e.m., tensiune, curent) sunt funcții sinusoidale de timp. În continuare ne vom ocupa numai de curenții sinusoidali. Generatoarele actuale de curent alternativ, de frecvență industrială, se construiesc astfel încât forma

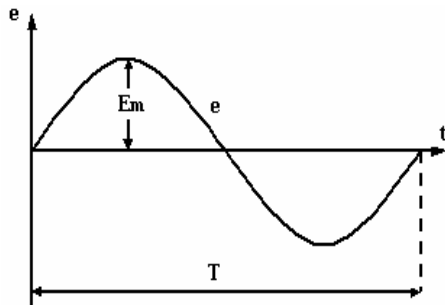


Fig.3.4

curbei t.e.m. să fie foarte apropiată de o sinusoidă..

Tensiunile electromotoare, căderile de tensiune și curenții sinusoidali, se exprimă prin funcții de forma:

$$\begin{aligned} e &= E_m \sin(\omega t + \alpha_{oe}) \\ u &= U_m \sin(\omega t + \alpha_{ou}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha_{oi})$$

în care: - e, u și i reprezintă valorile instantanee sau momentane; - E_m , U_m și I_m reprezintă valorile maxime;

- ω reprezintă pulsația funcțiilor periodice; - α_{oe} , α_{ou} , α_{oi} fazele inițiale ale mărimilor.

Din relația $e = E_m \sin \omega(t+T) = E_m \sin(\omega t + 2\pi)$ rezultă:

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi \text{ adică } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

În fig.3.4 este reprezentată grafic variația unei t.e.m. alternative. Când funcția periodică nu pornește din origine capătă expresia:

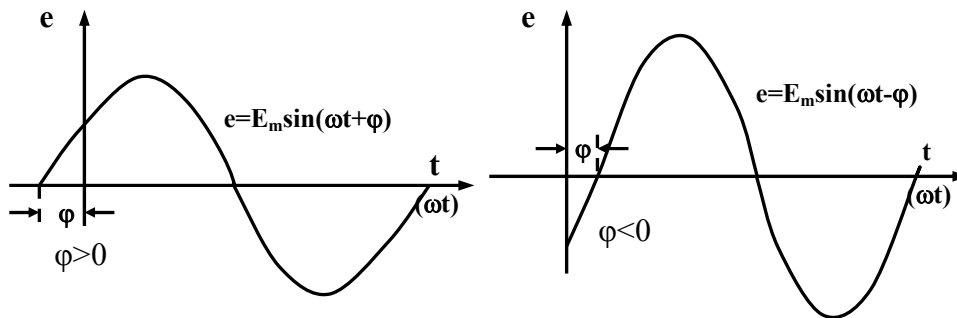


Fig.3.5

$$e = E_m \sin(\omega t \pm \varphi), \text{ unde } \varphi \text{ reprezintă faza inițială a t.e.m..}$$

În fig.3.5 este dată reprezentarea grafică a t.e.m. sinusoidale pentru $\varphi > 0$ și $\varphi < 0$. În acest caz, pe axa absciselor se poate lua fie timpul t , fie mărimea ωt , proporțională cu timpul.

3.1.3. Faza și decalajul fazelor

Să presupunem acum, că generatorul studiat în fig.3.1 are două spire identice, decalate în spațiu cu unghiul $\varphi_1 - \varphi_2$ (fig.3.6). Prin rotire se vor induce, în spire, tensiuni electromotoare de aceeași frecvență și cu aceeași amplitudine, deoarece spirele se rotesc cu aceeași viteză

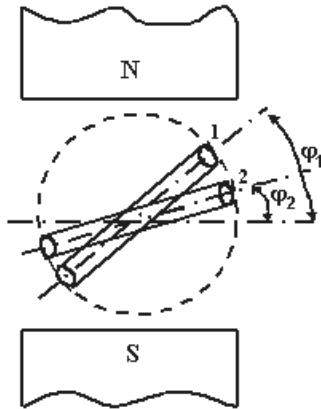


Fig.3.6

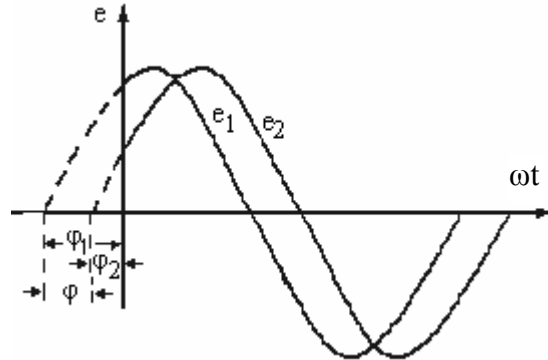


Fig.3.7

unghiulară și în același câmp magnetic. Datorită decalajului spirelor în spațiu, t.e.m. nu ajung să treacă prin valorile maxime în același moment. Dacă rotirea se face în sens invers acelor unui ceasornic, în momentul inițial la $t = 0$, prima spiră face un unghi φ_1 cu planul orizontal, iar spira a doua un unghi φ_2 . T.e.m. induse în cele două spire vor fi: $e_1 = E_m \sin(\omega t + \varphi_1)$ și $e_2 = E_m \sin(\omega t + \varphi_2)$.

Valorile instantanee a t.e.m. depind de amplitudine și de fazele inițiale (φ_1 , respectiv φ_2). Diferența dintre fazele inițiale a două mărimi sinusoidale, care au aceeași frecvență, se numește unghi de decalaj al fazelor sau defazaj și se notează de obicei cu φ (fig.3.7), $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Împărțind unghiul de decalaj al fazelor prin pulsație obținem timpul de decalaj:

$$\text{decalaj: } \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi T}{2\pi} = t_{12}$$

Putem spune că t.e.m. e_1 este defazată în avans față de t.e.m. e_2 cu unghiul $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ sau, t.e.m. e_2 este defazată în întârziere față de t.e.m. e_1 cu unghiul φ . Dacă, două mărimi sinusoidale trec prin zero și prin maximum în același timp (au aceeași fază inițială), se spune că cele două

mărimi sunt în fază sau sunt sincrone. Dacă cele două mărimi au diferența dintre fazele lor inițiale egală cu $\pm\pi$, se spune că ele sunt în opoziție de fază.

3.1.4. Reprezentarea simbolică a mărimilor sinusoidale

Rezolvarea circuitelor electrice de curent alternativ (c.a.) necesită un volum de calcul sporit față de cazul circuitelor de curent continuu, aceasta datorită faptului că toate variabilele din circuitele de c.a. sunt definite prin doi parametri: valoarea efectivă și fază inițială.

Pentru ușurarea calculelor acestor circuite, s-au elaborat metode bazate pe transformări ale mărimilor sinusoidale în mărimi simbolice. Cele mai utilizate metode simbolice, sunt cele geometrice (caracterizate prin vectori sau fazori) și cele complexe. La baza elaborării acestor metode, stau următoarele idei:

- mărimile simbolice asociate, să fie caracterizate de aceeași parametri ca și mărimile sinusoidale;
- relațiile între mărimile sinusoidale și mărimile simbolice asociate lor, să fie biunivoce, adică unei mărimi sinusoidale să-i corespundă o singură reprezentare simbolică și numai una și invers;
- operațiile aplicate mărimilor simbolice să reducă volumul de calcul și să nu altereze parametrii și deci, rezultatul final.

În aceste condiții, rezolvarea unei probleme printr-o metodă simbolică se face în felul următor:

- se asociază fiecărei mărimi sinusoidale câte o mărime simbolică (o parte din aceste mărimi, reprezintă date inițiale ale problemei iar restul reprezintă necunoscute);
- se efectuează operații de calcul asupra mărimilor simbolice, determinându-se reprezentările simbolice ale mărimilor sinusoidale necunoscute ;
- rezultatelor obținute prin calcul cu reprezentările simbolice, li se pun în corespondență mărimile sinusoidale respective obținându-se astfel necunoscutele problemei.

3.1.4.1. Reprezentarea fazorială

Această problemă se rezolvă foarte simplu și sugestiv, dacă pentru reprezentarea funcțiilor sinusoidale folosim vectori rotitori sau fazori. Să arătăm cum să utilizăm vectorul rotitor pentru reprezentarea unei funcții sinusoidale de timp, de exemplu pentru reprezentarea t.e.m.

$$e = E_m \sin(\omega t + \varphi) .$$

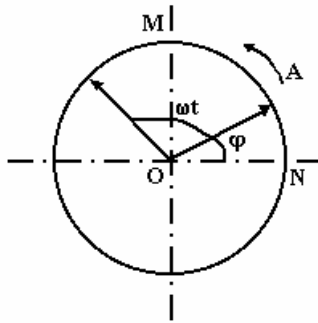


Fig.3.8

Considerăm sistemul de axe rectangulare NOM (fig.3.8) și convenim ca unghiurile pozitive să fie măsurate în sens trigonometric. Așezăm sub unghiul φ față de axa ON vectorul \overline{OA} , a cărui lungime la scara aleasă, este egală cu amplitudinea t.e.m. E_m . Să rotim vectorul \overline{OA} în jurul originii O în sensul pozitiv, cu viteza unghiulară constantă ω , egală cu pulsația t.e.m.

După un timp t , vectorul \overline{OA} va fi rotit cu unghiul ωt și va forma cu axa ON unghiul $\omega t + \varphi$. În acest caz, proiecția sa pe axa OM va avea valoarea $OA \sin(\omega t + \varphi)$, adică, la scara aleasă de noi, va da valoarea în momentul t a t.e.m. e , care este valoarea instantanee $E_m \sin(\omega t + \varphi)$. Ciclul complet de variație a t.e.m. se obține pentru o rotație completă a vectorului \overline{OA} . Așadar, o funcție sinusoidală de timp se poate reprezenta printr-un vector rotitor (fazor) a cărui viteză unghiulară este egală cu pulsația funcției sinusoidale respective, lungimea cu amplitudinea acestei funcții, iar poziția inițială a momentului $t = 0$ este determinată de faza inițială φ a funcției sinusoidale considerată. Se poate arăta ușor că reprezentarea unei funcții sinusoidale cu ajutorul vectorului rotitor concordă cu reprezentarea grafică a funcției în coordonate carteziene, ceea ce se vede în fig.3.9 în care poziția inițială a vectorului este arătată cu linie plină, iar pozițiile intermediare prin linie întreruptă.

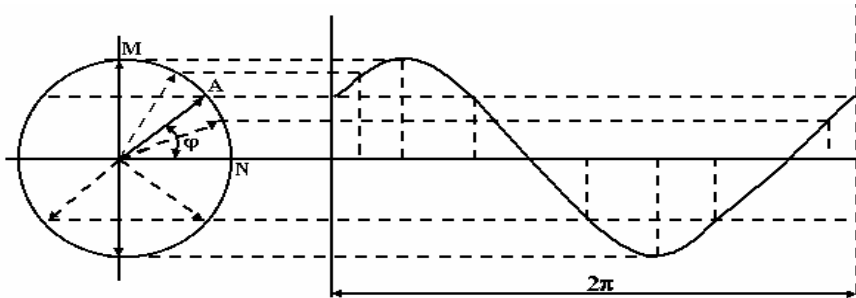


Fig.3.9

Să aplicăm reprezentarea funcțiilor sinusoidale prin vectori rotitori pentru determinarea sumei a două t.e.m. e_1 și e_2 de frecvențe egale:

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

În fig.3.10 vectorii $\overline{OA_1}$ și $\overline{OA_2}$ reprezintă fazorii t.e.m. e_1 și e_2 . Pentru ambele t.e.m. scara trebuie să fie aceeași. Valoarea instantanee a t.e.m. totale, în fiecare moment, este egală cu suma valorilor instantanee ale t.e.m. e_1 și e_2 , adică cu suma proiecțiilor pe axa OM ale vectorilor $\overline{OA_1}$ și $\overline{OA_2}$, care reprezintă aceste t.e.m.

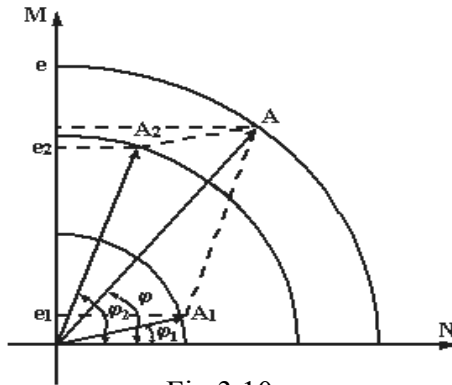


Fig.3.10

Proiecția vectorului \overline{OA} pe axa OM (în fiecare moment), $\overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2}$, este suma $e_1 + e_2 = e$, adică vectorul \overline{OA} este vectorul care reprezintă t.e.m. totală e , iar unghiul φ , format de acest vector cu axa ON în momentul $t = 0$, dă faza inițială acestei t.e.m.

Deoarece t.e.m. e_1 și e_2 au aceeași frecvență, vectorii $\overline{OA_1}$ și $\overline{OA_2}$ se rotesc cu aceeași viteză unghiulară și unghiul dintre vectori rămâne invariabil. Vectorul \overline{OA} , care reprezintă t.e.m. totală e , se va roti cu aceeași viteză unghiulară, prin urmare această t.e.m., e , va fi o funcție sinusoidală de timp care va avea aceeași frecvență ca și tensiunile electromotoare ce se adună.

Metoda indicată se poate aplica unui număr oricât de mare de t.e.m. sau curenți sinusoidali de aceeași frecvență, la adunarea și la scăderea acestora. În rezultatele obținute vom avea totdeauna t.e.m. sau curenți sinusoidali de aceeași frecvență, ale căror amplitudini depind de amplitudinile termenilor adunați și de diferențele dintre fazele lor inițiale. Din cele expuse rezultă că fazorul care reprezintă suma unor mărimi sinusoidale de aceeași frecvență este egal cu suma vectorială a fazorilor care reprezintă mărimile sinusoidale care se adună.

Dacă interesează numai amplitudinile t.e.m. sau ale curenților și defazările dintre ele, cum se întâmplă în majoritatea cazurilor, atunci este importantă numai poziția relativă a fazorilor unul față de altul și nu importă poziția acestor fazori față de axe. În acest din urmă caz, unul dintre fazori poate avea o poziție oarecare, toți ceilalți trebuind să fie însă orientați corect față de acest fazor arbitrar ales.

Totalitatea fazorilor care caracterizează procesele produse într-un circuit oarecare de curent alternativ și care sunt construiți cu respectarea orientării lor relative corecte, se numește **diagramă de fazori**.

3.1.4.2. Reprezentarea în complex

Metoda simbolică complexă este cea mai utilizată metodă în electrotehnică. Rezolvarea circuitelor de c.a. cu ajutorul diagramelor de fazori nu dă întotdeauna satisfacția deplină în ceea ce privește precizia din cauza erorilor inerente metodelor grafice. În afară de aceasta, în cazul circuitelor ramificate, diagramele de fazori devin extrem de complicate. Exprimând mărimile alternative cu ajutorul numerelor complexe se ușurează mult calculul analitic și se permite aplicarea legii lui Ohm și a teoremelor lui Kirchhoff, sub aceeași formă ca și în curent continuu.

Se știe că o mărime complexă se scrie sub forma:

$$\underline{c} = a \pm jb, \quad (3.6)$$

în care a și b sunt numere reale, iar $j = \sqrt{-1}$.

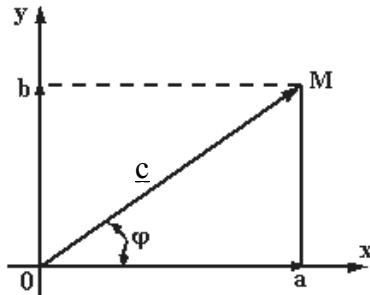


Fig.3.11

Dacă considerăm un plan cu două axe de coordonate (fig.3.11) Ox și Oy, pe axa Ox vom lua numerele reale, iar pe axa Oy, numerele imaginare. În fig.3.11 este redată reprezentarea grafică a mărimii complexe \underline{c} sub forma unui vector \overline{OM} , ale cărui proiecții pe axele de coordonate sunt a și b (b este pozitiv).

Dacă mărimea (modulul) vectorului este r , expresia (3.6) se poate

pune sub forma: $\underline{c} = r \cos \varphi + jr \sin \varphi = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ (3.7)

Unghiul φ (argumentul vectorului), reprezintă unghiul cu care vectorul este rotit în sens trigonometric față de axa numerelor reale. Argumentul este pozitiv când vectorul este rotit în sens trigonometric față de axa numerelor reale și negativ în sens contrar. Modulul vectorului este dat de expresia :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

iar argumentul rezultă din relația : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$

Folosind relațiile lui Euler: $\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$ și $\sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$

din care se obține ușor $\cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j\varphi}$ (3.8)

relația (3.7) devine: $\underline{c} = r e^{j\varphi}$ (3.9)

Expresia (3.6) constituie reprezentarea algebrică, expresia (3.7) - reprezentarea trigonometrică, iar expresia (3.9) - reprezentarea exponențială.

Mărimea imaginară $e^{j\varphi}$ din reprezentarea exponențială se numește *operatorul de rotație al vectorului*, întrucât el ne indică cu cât trebuie să rotim vectorul în sens trigonometric dacă φ este pozitiv și în sensul acelor unui ceasornic dacă φ este negativ, față de axa numerelor reale. Unghiul φ din exponentul operatorului trebuie exprimat în radiani, exponentul fiind un număr fără dimensiuni.

Se numesc mărimi complexe conjugate, două mărimi de forma:

$$\underline{c} = a + jb \text{ și } \underline{c}^* = a - jb \text{ sau } \underline{c} = re^{j\varphi} \text{ și } \underline{c}^* = re^{-j\varphi} .$$

Convențional, mărimea complexă conjugată se notează cu o steluță. Să reamintim operațiile de derivare și integrare a unei mărimi complexe.

Fie vectorul reprezentat de mărimea complexă $\underline{C} = Ce^{j\alpha}$ în care α este o funcție de timp oarecare. Aplicând acestei expresii regulile obișnuite de derivare, obținem:

$$\frac{dC}{dt} = jCe^{j\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = j \frac{\partial \alpha}{\partial t} \cdot \underline{C} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \underline{C} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Rezultă că prin derivare se obține tot un vector, rotit însă cu $\pi/2$ înainte față de vectorul dat și al cărui modul este de $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ ori mai mare.

Pornind de la relația : $\frac{dC}{dt} = j \frac{\partial \alpha}{\partial t} \underline{C}$ rezultă că :

$$\underline{C} dt = \frac{dC}{j \frac{\partial \alpha}{\partial t}} \text{ deci : } \int \underline{C} dt = \frac{C}{j \frac{\partial \alpha}{\partial t}} = -j \frac{C}{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} = \frac{C}{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Prin urmare, prin integrare se obține tot un vector, rotit însă cu $\pi/2$ în urma vectorului dat și al cărui modul este de $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ ori mai mic.

Am văzut că orice mărime complexă poate fi reprezentată printr-un anumit vector, ceea ce înseamnă că și orice vector poate fi reprezentat printr-o mărime complexă. Aceasta permite ca și în electrotehnică mărimile vectoriale să se transforme în mărimi complexe și cu ajutorul lor să se rezolve diverse probleme prin calcul analitic.

Dacă considerăm de exemplu, un curent sinusoidal:

$$i(t) = I_m \sin \omega t$$

Acesta poate fi reprezentat vectorial printr-un vector rotitor (fazor) luat ca origine de fază, la timpul $t=0$. Luând ca origine de fază axa reală, fazorul curentului va fi orientat de-a lungul acestei axe. Vom folosi în

notație simbolică, utilizând valoarea eficace a curentului, $\underline{I}=I$. Un alt curent dat de relația $i_1=I_{1m}\sin(\omega t+\varphi)$ va fi reprezentat printr-un vector decalat în avans cu unghiul φ față de vectorul \underline{I} și deci va fi reprezentat prin relația:

$$\underline{I}_1 = I_1 e^{j\varphi} = I_1(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad (3.10)$$

la fel se va proceda și în cazul când avem de a face cu o căderi de tensiuni sau cu o t.e.m. Dacă valoarea instantanee a tensiunii este dată de relația: $u = U_m \sin(\omega t+\varphi)$. Expresia ei complexă, utilizând valoarea eficace ia forma:

$$\underline{U}=U e^{j\varphi} \quad (3.11)$$

Aceste reprezentări se numesc reprezentări simplificate (s-a renunțat la mărimile $\sqrt{2}$ și ω care sunt de regulă cunoscute). Funcțiile sinusoidale am văzut că pot fi reprezentate prin vectori rotitori (fazori). Deci argumentul acestor fazori este o funcție de timp și în acest caz relațiile (3.10) și (3.11) se scriu sub forma lor generală (reprezentarea complexă nesimplificată): $\underline{I}_1=I_1 e^{j(\omega t+\varphi)}$; $\underline{U}=U e^{j(\omega t+\varphi)}$.

3.1.5. Valorile medii și eficace ale curentului alternativ

Fie curentul sinusoidal, $i = I_m \sin \omega t$. Valoarea medie a curentului pe un interval de timp egal cu o perioadă, T , prin definiție, este:

$$i_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} i(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T i(t) dt \right] \quad (3.12)$$

Cele două integrale pe semiperioadele curentului corespund suprafețelor hașurate din fig.3.12. Ele sunt egale și de semn contrar, deci $i_{med}=0$

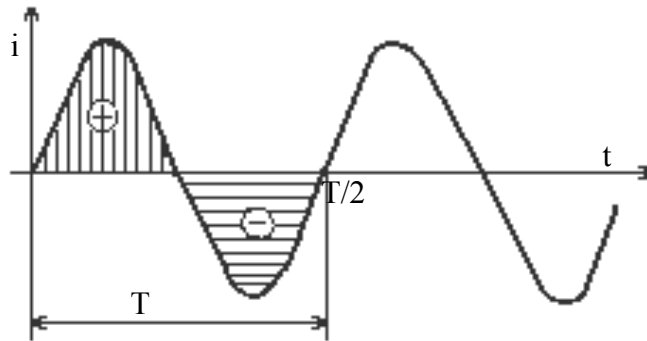


Fig.3.12

Valoarea medie a unei mărimi periodice pe o semiperioada se calculează cu relația:

$$i_{med\frac{T}{2}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) dt \quad (3.13)$$

Se obține pentru intensitatea medie a curentului alternativ pe o semiperioadă expresia:

$$i_{med\frac{T}{2}} = \frac{2}{\pi} I_m \quad (3.14)$$

În calculul circuitelor de curent alternativ se folosesc valorile eficace (efective) ale t.e.m., căderilor de tensiune și ale intensităților curenților. Atât valorile maxime cât și valorile instantanee ale curentului alternativ nu pot fi măsurate decât cu ajutorul unor aparate speciale. Instrumentele de măsurat obișnuite, întrebuințate la măsurarea curentului alternativ dau valorile eficace a curentului. **Valoarea efectivă** sau **eficace** a unui curent alternativ se definește ca fiind, acea valoarea a curentului continuu echivalent, care dezvoltă printr-o rezistență, în timpul unei perioade, aceeași cantitate de căldură ca și curentul alternativ respectiv. Conform standardelor în vigoare, valorile eficace se notează cu litere mari (I, U și E reprezintă valorile efective ale curentului, tensiunii și tensiunii electromotoare).

Cantitatea de căldură dezvoltată de curentul continuu în rezistența R, în timpul unei perioade a curentului alternativ este:

$$Q = R \cdot I^2 \cdot T$$

Cantitatea de căldură dezvoltată de curentul alternativ în aceeași rezistență R și în același interval de timp T este: $Q = \int_0^T R \cdot i^2 dt$

Din egalitatea celor două relații, rezultă:

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \quad (3.15)$$

Dacă curentul variază după legea sinusului, $i = I_m \sin \omega t$, relația (3.15)

devine: $I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt$

$$\text{De unde rezultă: } I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (3.16)$$

În mod asemănător se definesc și valorile eficace ale t.e.m. și ale

căderilor de tensiune, adică: $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$ și $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

Raportul dintre valoarea eficace și valoarea medie aritmetică se numește factor de formă al curbei. Pentru t.e.m. sinusoidală avem:

$$K = \frac{E}{e_{med}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2E_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11 \quad (3.17)$$

3.1.6. Legea lui Ohm și teoremele lui Kirchhoff în c.a.

Legea lui Ohm din curent continuu se regăsește și în curent alternativ sub aceeași formă, cu condiția ca ea să fie aplicată valorilor instantanee sau valorilor simbolice.

Dacă circuitul de curent alternativ conține numai rezistența ohmică, atunci:

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m \sin \omega t}{R} = I_m \sin \omega t, \quad \text{unde:} \quad I_m = \frac{E_m}{R}$$

Se observă că dacă t.e.m. este sinusoidală și curentul este sinusoidal și de aceeași pulsație. Ceea ce caracterizează un asemenea circuit care conține numai rezistență ohmică, este faptul că cele două mărimi, t.e.m. și intensitatea curentului, sunt sincrone (trec prin zero, prin maximum și prin minimum în același timp). Vom vedea în paragrafele următoare, că în cazul circuitelor de curent alternativ se întâlnesc și alte rezistențe (inductive și capacitive), în afară de cele ohmice și că în asemenea cazuri curentul nu mai este în fază cu tensiunea.

Legea lui Ohm se poate scrie și simbolic (cu ajutorul numerelor complexe) sub forma:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \quad (3.18)$$

unde Z este impedanța porțiunii de circuit, despre care se va vorbi în paragrafele următoare.

Teoremele lui Kirchhoff în c.a. se aplică sub aceeași formă ca și în c.c., însă ele se scriu asupra valorilor momentane, vectoriale sau simbolice.

Teorema I-a a lui Kirchhoff aplicată într-un nod dă relațiile:

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0; \quad \sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0 \quad (3.19)$$

Teorema II-a a lui Kirchhoff aplicată unui contur închis are relațiile: (3.22), reprezentate prin fazori (fig.3.15), sunt în fază, adică tensiunea de

$$\sum_{k \in p} (r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C} \int i_k dt) = \sum_{k \in p} e_k; \quad \sum_{k \in p} \bar{z}_k \bar{I}_k = \sum_{k \in p} \bar{E}_k; \quad \sum_{k \in p} z_k I_k = \sum_{k \in p} E_k \quad (3.20)$$

unde $k \in p$, înseamnă că latura k aparține conturului p .

3.1.7. Circuite fundamentale în curent alternativ

În circuitele de c.a., spre deosebire de cele de c.c. întâlnim trei feluri de rezistențe: ohmice (fig.3.13a), inductive (fig.3.13b) și capacitive (fig.3.13c). Aceste rezistențe pot fi legate în serie, paralel și

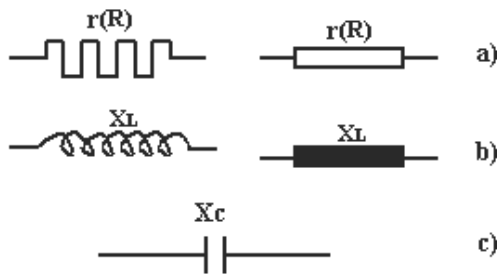


Fig.3.13

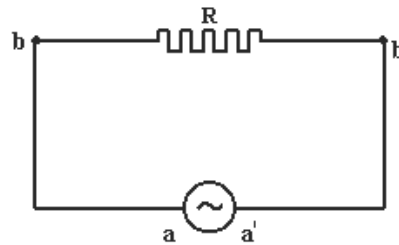


Fig.3.14

mixt. Circuitele fundamentale conțin fie numai rezistență ohmică, fie inductivă, fie capacitivă.

3.1.7.1. Circuite cu rezistență ohmică

$$\text{Fie: } i(t) = I_m \sin \omega t \quad (3.21)$$

un curent sinusoidal care circulă prin rezistența r . Tensiunea la bornele rezistenței r va fi: $u_r = ri = rI_m \sin \omega t$

$$\text{sau } u_r = U_{rm} \sin \omega t \quad (3.22)$$

unde $U_{rm} = rI_m$. Dacă înlocuim valorile maxime în funcție de valorile



Fig.3.15

de la

și curentul care trece prin rezistență sunt în fază.

eficace, atunci $U_r = rI$. Mărimile exprimate prin relațiile (3.21) și (3.22), reprezentate prin fazori (fig.3.15), sunt în fază, adică tensiunea

bornele unei rezistențe chimice

3.1.7.2. Circuite cu inductanță.

Să considerăm că printr-o bobină, de inductanță L (fig.3.16), circulă curentul:

$$i = I_m \sin \omega t \quad (3.23)$$

Să notăm cu u tensiunea de la bornele $a - b$ ale sursei și cu u_L cea de la bornele $c - d$ ale bobinei. Aplicând teorema a II-a lui Kirchhoff circuitului abcd din fig.3.16, vom avea relația:

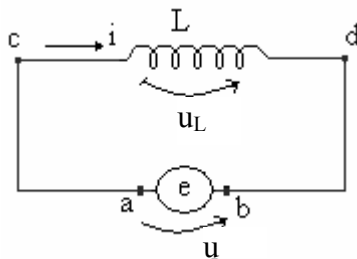


Fig.3.16

$$u + e_L = ri \text{ unde } e_L = -L \frac{di}{dt}$$

Dacă considerăm neglijabilă rezistența ohmică a bobinei, atunci:

$$u = u_L = -e_L = L \frac{dj}{di} \quad (3.24)$$

Folosind relațiile (3.23) și (3.24) obținem:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L\omega \cdot I_m \cos \omega \cdot t = L\omega \cdot I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.25)$$

dar $u_L = U_{Lm} \sin(\omega \cdot t + \varphi)$, de unde rezultă:

$$U_{Lm} = L\omega \cdot I_m \text{ și } \varphi = \pi/2 \quad (3.26)$$

Mărimile exprimate prin relațiile (3.23) și (3.25), reprezentate cu fazori, sunt decalate cu un unghi de $\frac{\pi}{2}$, adică tensiunea de la bornele unei

inductanțe este decalată înainte cu $\frac{\pi}{2}$ față de curentul care trece prin bobină (fig. 3.17). T.e.m. de autoinducție E_L este în opoziție cu tensiunea de la bornele inductanței.

Relația $U_{Lm} = L\omega I_m$ se poate scrie și în funcție de valorile eficace ale

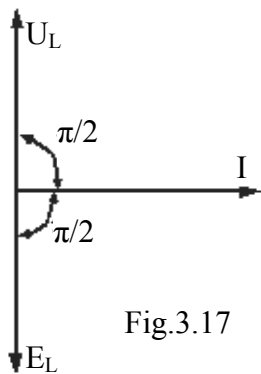


Fig.3.17

tensiunii și curentului, adică: $U_L = \omega L \cdot I$ sau:

$$I = \frac{U_L}{\omega L} \quad (3.27)$$

Comparând relația (3.27) cu relația $I=U/R$, de la circuitele de curent continuu, observăm că produsul ωL se comportă ca o rezistență. Această rezistență o vom numi **reactanță inductivă** și o vom nota cu X_L , adică $X_L = L\omega$. Reactanța inductivă se

măsoară tot în ohmi, ca orice rezistență. Relația (3.25) poate fi scrisă în complex, sub forma:

$$\underline{U}_L = L\omega \underline{I} e^{j\frac{\pi}{2}} = jL\omega \underline{I} \quad (3.28)$$

Rezultă: $\frac{\underline{U}_L}{\underline{I}} = jL\omega = jX_L$. Se vede și din această relație că U_L este

defazat înainte cu $\frac{\pi}{2}$ față de intensitatea curentului.

3.1.7.3. Circuite cu condensatoare

Fie rețeaua din fig.3.18, ce conține un condensator de capacitate C . Notăm cu u_c tensiunea la bornele condensatorului și cu u tensiunea de la bornele sursei, dată de relația:

$$u(t) = U_m \sin \omega t \quad (3.29)$$

$$\text{Însă } u = u_c = \frac{q}{C} \text{ și } i = \frac{dq}{dt} \quad (3.30)$$

Din relația (3.29) și (3.30) avem:

$$\frac{du_c}{dt} = \omega U_m \cos \omega t = \omega U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \text{ și}$$

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \text{ sau}$$

$$i(t) = C \omega U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.31)$$

$$\text{unde: } I_m = C \omega U_m \text{ și } \varphi = \pi/2 \quad (3.32)$$

Se observă că intensitatea curentului ce trece printr-un condensator este defazată cu $\pi/2$ înainte față de tensiunea de la bornele condensatorului (fig.3.19).

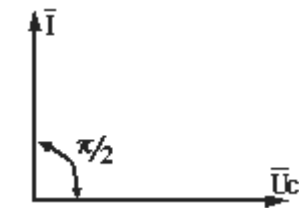


Fig.3.19

Din relația (3.32) se poate scrie:

$$I = \frac{U_c}{\frac{1}{C\omega}} \text{ adică } 1/C\omega \text{ se comportă ca o rezistență}$$

și poartă numele de **reactanță capacitivă** și se notează cu $X_C = 1/C\omega$.

Reactanța capacitivă se măsoară în ohmi, ca

orice rezistență.

Dacă relația $i = C \frac{du_c}{dt}$ este scrisă cu ajutorul numerelor complexe, vom

avea: $\underline{I} = C\omega \underline{U}_c e^{j\frac{\pi}{2}} = jC\omega \underline{U}_c$ sau

$$\frac{\underline{U}_c}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega \cdot C} = -j \frac{1}{\omega \cdot C} = -jX_C \quad (3.33)$$

S-au obținut aceleași rezultate, adică intensitatea curentului care trece printr-un conductor este defazată înainte cu $\pi/2$ față de tensiunea de la bornele condensatorului.

Se pot considera și relațiile (3.30), de unde obținem relația:

$$u_c = \frac{1}{C} \int i \cdot dt \quad (3.34)$$

sau, în complex:
$$\underline{U}_c = \frac{1}{C\omega} \underline{I} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jX_c \underline{I} = X_c \underline{I} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (3.35)$$

adică s-a ajuns la același rezultat ca mai sus, respectiv \underline{U}_c este defazat în urmă cu $\pi/2$ față de \underline{I} .

3.1.8. Circuite serie în curent alternativ

Să considerăm cazul general, când într-un circuit de c.a. avem rezistență ohmică, inductivă și capacitivă legate în serie (fig.3.20). Aplicând teorema a II-a a lui Kirchoff circuitului reprezentat în fig.3.20, avem relațiile:

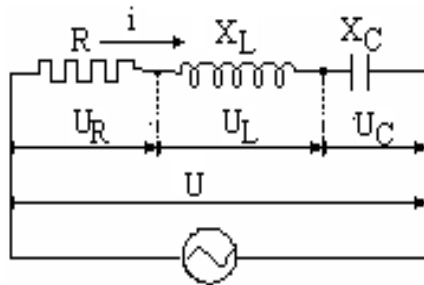


Fig. 3.20

$$u = u_r + u_L + u_c$$

$$\bar{U} = \bar{U}_r + \bar{U}_L + \bar{U}_c \quad (3.36)$$

$$\underline{U} = \underline{U}_r + \underline{U}_L + \underline{U}_c$$

Dacă rezolvăm ecuația scrisă sub formă vectorială și luând ca origine de fază fazorul intensității curentului, obținem diagrama de fazoni din fig.3.21a. Căderea de tensiune \bar{U}_R este în fază cu intensitatea curentului și deci vom lua

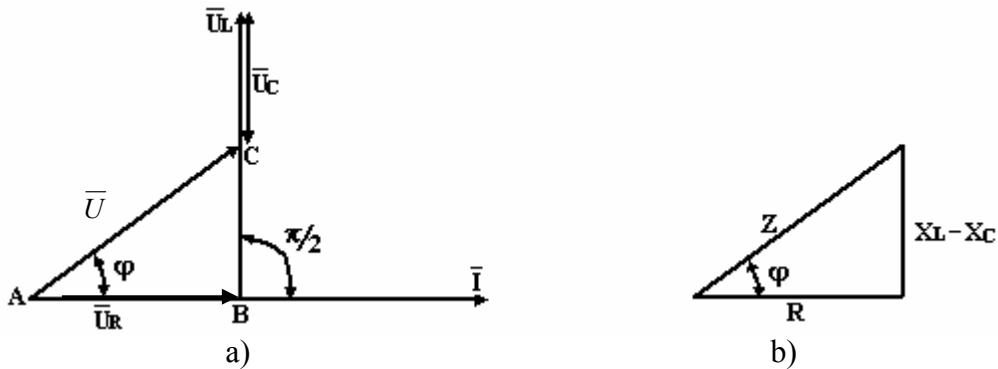


Fig.3.21

fazorul \bar{U}_R pe direcția fazorului curentului. La capătul fazorului \bar{U}_R adăugăm fazorul \bar{U}_L care este defazat cu $\pi/2$ înainte față de fazorul intensității curentului, iar la capătul fazorului \bar{U}_L se adăugă fazorul

tensiunii \overline{U}_C , care este decalat în urmă cu $\pi/2$ față de intensitatea curentului. Fazorul \overline{AC} care unește originea cu capătul fazorului \overline{U}_C reprezintă tensiunea de la bornele sursei (tensiunea aplicată la bornele grupării). Din triunghiul ABC, rezultă: $U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$ sau, $U^2 = (RI)^2 + (X_L I - X_C I)^2$ din care se scoate relația:

$$\frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = Z \quad (3.37)$$

Raportul U/I se notează cu Z și poartă numele de **impedanță**. Impedanța are dimensiunile unei rezistențe și se măsoară în ohmi. Decalajul dintre tensiune și curent este dat de relația:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_r} = \frac{X_L - X_C}{R} \text{ sau } \cos \varphi = \frac{U_r}{U} = \frac{R}{Z}$$

Împărțim laturile triunghiului ABC, prin I, obținem un alt triunghi asemenea (fig. 3.21b), cu laturile Z , R , și $X_L - X_C$, care poartă numele de **triunghiul impedanțelor**. Din triunghiul impedanțelor rezultă toate relațiile scrise anterior pentru Z , $\cos \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi$ etc.

Dacă în circuitul din fig.3.20 lipsește una din rezistențe, impedanța circuitului va fi:

- pentru $R = 0$, $Z = X_L - X_C = X$, adică impedanța circuitului este egală cu reactanța totală a circuitului;

- pentru $X_L = 0$, $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$

- pentru $X_C = 0$, $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$

Dacă din relațiile 3.36, se utilizează relația scrisă simbolic $\underline{U} = \underline{U}_r + \underline{U}_L + \underline{U}_C$, cu: $\underline{U}_r = R \underline{I}$, $\underline{U}_L = j X_L \underline{I}$ și $\underline{U}_C = -j X_C \underline{I}$

Rezultă relația:

$$\underline{U} = \underline{I} (R + j X_L - j X_C) \quad (3.38)$$

sau:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j (X_L - X_C) = \underline{Z} \quad (3.39)$$

cu modulul $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ și argumentul $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R}$

(argument pozitiv înseamnă că fazorul tensiunii este înainte față de fazorul curentului – defazaj inductiv).

3.1.9. Circuite derivație în curent alternativ

Să considerăm un circuit derivație R-L-C (format dintr-o rezistență ohmică, o reactanță inductivă și o reactanță capacitivă legate în paralel), alimentate de la o sursă de c.a. (fig.3.22).

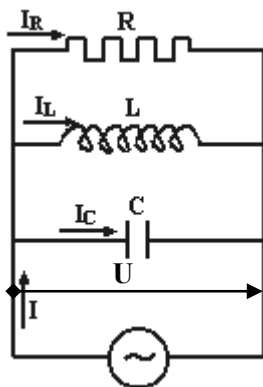


Fig.3.22

Aplicând teorema I a lui Kirchhoff pentru mărimile instantanee, fazoriale și complexe, obținem relațiile:

$$\begin{aligned} i &= i_r + i_L + i_C \\ \bar{I} &= \bar{I}_r + \bar{I}_L + \bar{I}_C \\ \underline{I} &= \underline{I}_r + \underline{I}_L + \underline{I}_C \end{aligned} \quad (3.40)$$

Pentru a găsi fazorul curentului total \bar{I} , se ia ca axă de referință, axa fazorului tensiunii (fig.3.23). Fazorul \bar{I}_r este în fază cu \bar{U} , fazorul \bar{I}_L este decalat în urmă cu $\pi/2$ față de \bar{U} , iar fazorul \bar{I}_C este decalat înainte cu $\pi/2$ față de \bar{U} . Însușind acești fazori, vom obține \bar{I} decalat ca un unghi φ , față de tensiunea aplicată.

Dacă aplicăm teorema lui Pitagora, pentru triunghiul dreptunghic ABC, obținem relațiile:

$$I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2 \quad \text{și} \quad I^2 = \frac{U^2}{R^2} + \left(\frac{U}{X_L} - \frac{U}{X_C} \right)^2$$

sau:

$$\frac{I}{U} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2} = \frac{1}{Z} \quad (3.41)$$

inversul impedanței poartă numele de admitanță și se notează cu $Y = \frac{1}{Z}$.

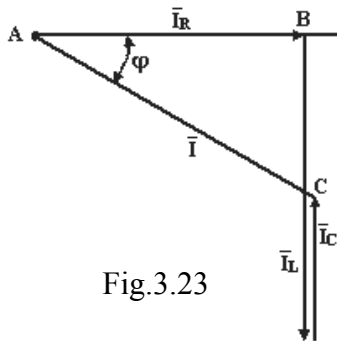


Fig.3.23

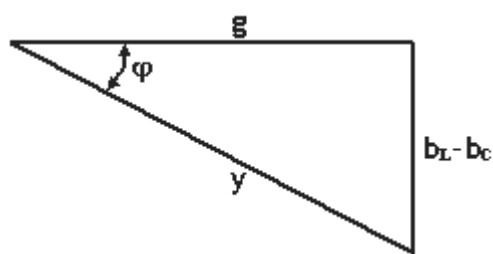


Fig.3.24

Notăm cu: $\frac{1}{R} = g$; $\frac{1}{X_L} = b_L$ și $\frac{1}{X_C} = b_C$, unde g reprezintă conductanța, b reprezintă susceptanța inductivă și b_c susceptanța capacitivă. În cazul acesta, admitanța se va scrie sub forma:

$$Y = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2} \quad (3.42)$$

Dacă împărțim laturile triunghiului ABC prin U obținem triunghiul admitanțelor (fig.3.24). Decalajul dintre tensiune și intensitate rezultă din triunghiul admitanțelor.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b_L - b_C}{g} \quad \text{sau} \quad \cos \varphi = \frac{g}{Y}$$

Considerând relația (3.40) scrisă simbolic și înlocuind curenții \underline{I}_R , \underline{I}_L și \underline{I}_C cu expresiile: $\underline{I}_R = \frac{U}{R}$; $\underline{I}_L = \frac{U}{jX_L}$ și $\underline{I}_C = \frac{U}{-jX_C}$, rezultă:

$$\underline{I} = U \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} - \frac{1}{jX_C} \right) \quad (3.43)$$

sau:

$$\frac{\underline{I}}{U} = \frac{1}{R} - j \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) \quad (3.44)$$

și respectiv: $Y = g - j(b_L - b_C)$ (3.45)

Modulul și argumentul admitanței sunt:

$$Y = \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2}; \quad \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{b_L - b_C}{g} \quad (3.46)$$

3.1.10. Circuite mixte în curent alternativ

Fie circuitul din fig. 3.25. Aplicăm teorema I-a a lui Kirchhoff sub formă vectorială:

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_C$$

Pentru a rezolva această relație construim diagrama de fazori în felul următor: față de fazorul curentului \bar{I} luăm fazorii tensiunilor de la bornele rezistenței ohmice și de la bornele reactanței inductive.

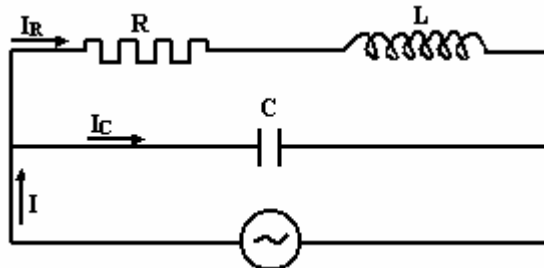


Fig.3.25

Însumând acești fazori aflăm fazorul tensiunii totale aplicată grupării (fig.3.26), care este aceeași și cu tensiunea de la bornele condensatorului.

Față de fazorul tensiunii \bar{U} luăm fazorul curentului \bar{I}_C decalat înainte cu $\pi/2$ și însumăm vectorial curentii \bar{I}_C și \bar{I}_R . În felul acesta putem afla mărimea curentului total, din relația:

$$I^2 = I_R^2 + I_C^2 + 2I_R I_C \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)$$

Decalajul φ dintre vectorii \bar{I} și \bar{U} se

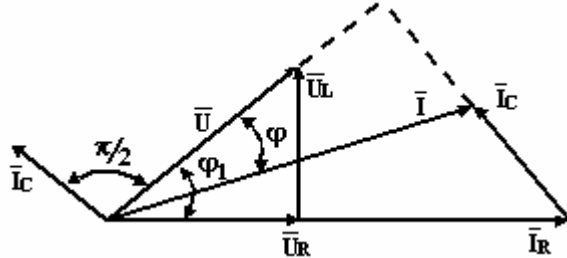


Fig.3.26

poate afla scriind egalitatea proiecțiilor fazorilor curentilor \bar{I} și \bar{I}_r pe direcția fazorului tensiunii \bar{U} , adică:

$$I \cos \varphi = I_r \cos \varphi_1$$

$$\text{deci: } \cos \varphi = \frac{I_r \cos \varphi_1}{I}$$

presupunând cunoscute tensiunea aplicată la bornele grupării și rezistențele R , X_L și X_C , putem determina celelalte mărimi care ne interesează cu relațiile:

$$I_R = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}; I_C = \frac{U}{X_C}; \cos \varphi_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

Problema poate fi rezolvată ușor și cu ajutorul numerelor complexe și anume:

$$\underline{Z}_1 = R + jX_L; \underline{I}_1 = \frac{U}{\underline{Z}_1}; \underline{I}_2 = \frac{U}{-jX_C}; \underline{I} = \underline{I}_2 + \underline{I}_1$$

3.1.11. Relații dintre rezistențe și conductanțe echivalente

Din triunghiul impedanțelor rezultă relațiile:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \text{ și } \sin \varphi = \frac{X}{Z}$$

iar din triunghiul admitanțelor rezultă: $\cos \varphi = \frac{g}{Y}$ și $\sin \varphi = \frac{b}{Y}$

Cum decalajul dintre tensiuni și curent este același, putem scrie:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{g}{Y} \text{ și } \sin \varphi = \frac{X}{Z} = \frac{b}{Y}, \text{ de unde rezultă:}$$

$$R = \frac{gZ}{Y} = \frac{g}{Y^2} \text{ și } X = \frac{bZ}{Y} = \frac{b}{Y^2} \quad (3.47 \text{ și } 3.48)$$

sau:

$$g = \frac{R}{Z^2} \text{ și } b = \frac{X}{Z^2} \quad (3.49 \text{ și } 3.50)$$

Din expresiile mărimilor R , X , Z , g , b , Y , rezultă că numai impedanța Z și admitanța Y sunt mărimi inverse una alteia, în timp ce rezistența R și conductanța g , precum și reactanța X și susceptanța b nu sunt mărimi inverse una alteia, decât numai în cazuri particulare. Numai pentru $X=0$ avem $g = \frac{1}{R}$ și pentru $R=0$ avem $b = \frac{1}{X}$. Relațiile deduse mai sus se pot aplica cu ușurință la rezolvarea circuitelor mixte.

Exemplu: Fie circuitul reprezentat în fig. 3.27, unde se cunosc: $r_1, r_2, r_3, x_1, x_2, x_3$ și tensiunea aplicată U . Se cere să se determine: impedanța totală a circuitului, curenții I_1, I_2, I_3 și defazajul φ , dintre tensiunea \bar{U} și curentul \bar{I} .

Pentru rezolvarea acestei probleme, vom reduce circuitul mixt la un circuit serie echivalent, după cum urmează: - laturile circuitului compuse din r_1, x_1 și r_2, x_2 le transformăm în circuite echivalente derivație cu conductanțele g_1 și g_2 , și susceptanțele b_1 și b_2 . Se înlocuiesc cele două circuite derivație cu unul singur de conductanță g_{12} și susceptanță b_{12} . Circuitul compus din g_{12} și b_{12} îl înlocuim cu un circuit echivalent serie de rezistență r_{12} și reactanță x_{12} . În felul acesta am redus

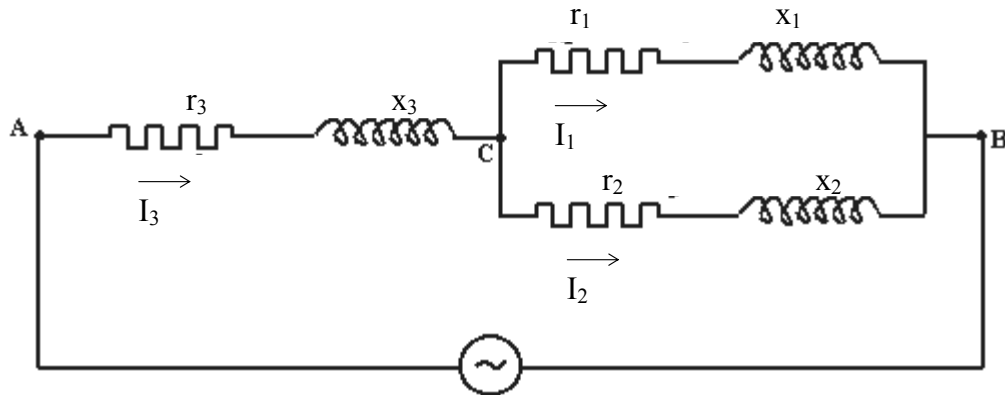


Fig.3.27

circuitul mixt, la un circuit serie compus din rezistența ohmică echivalentă r_e și din reactanța echivalentă x_e , căruia i se poate calcula impedanța echivalentă.

Formulele de calcul sunt următoarele:

$$z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_1^2}; \quad z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_2^2}; \quad g_1 = \frac{r_1}{z_1^2}; \quad g_2 = \frac{r_2}{z_2^2}; \quad g_{12} = g_1 + g_2;$$

$$b_1 = \frac{X_1}{Z_1^2}; b_2 = \frac{X_2}{Z_2^2}; b_{12} = b_1 + b_2; Y_{12} = \sqrt{g_{12}^2 + b_{12}^2}; z_{12} = \frac{1}{Y_{12}};$$

$$r_{12} = \frac{g_{12}}{Y_{12}^2}; x_{12} = \frac{b_{12}}{Y_{12}^2};$$

Impedanța va fi: $z_e = \sqrt{r_e^2 + x_e^2}$ unde: $r_e = r_3 + r_{12}$ și $x_e = x_3 + x_{12}$

Curenții se află cu relațiile:

$$I_3 = \frac{U}{z_e}; U_1 = U_2 = U_{12} = I_3 z_{12}; I_1 = \frac{U_{12}}{z_1}; I_2 = \frac{U_{12}}{z_2}$$

Decalajele se determină din relațiile:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x_1}{r_1}; \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{x_2}{r_2}; \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{x_3}{r_3} \text{ și } \operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r}$$

Diagrama de fazori a întregului circuit se construiește prin suprapunerea diagramelor de fazori a fiecărei laturi în parte (fig.3.28), știind că: $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{I}_3$ și $\bar{U}_1 + \bar{U}_3 = \bar{U}$

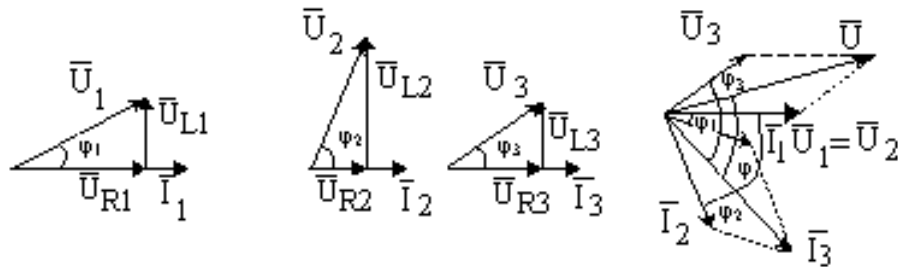


Fig.3.28

Problema poate fi rezolvată cu ușurință, utilizând numerele complexe și anume:

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jX_1; \underline{Z}_2 = r_2 + jX_2; \underline{Z}_3 = r_3 + jX_3; \underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2};$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12}; \underline{I}_3 = \frac{U}{\underline{Z}_e}; \underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{I}_3}{\underline{Z}_1} = \underline{I}_3 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}; \underline{I}_2 = \underline{I}_3 - \underline{I}_1$$

Din aceste relații se pot calcula și modulul și argumentul mărimilor respective, iar diagrama de fazori se va construi luând \bar{U} ca origine de fază. Trebuie să rezulte o singură diagramă identică cu cea din fig. 3.28, cu deosebire că toți fazorii vor fi roțiți, în sens orar, cu același unghi α (pentru ca \bar{U} să fie pe orizontală).

3.1.12. Puterea în c.a. monofazat

În circuitele de curent alternativ avem definite mai multe puteri electrice. Puterea instantanee, prin definiție, este produsul dintre valorile instantanee ale tensiunii și intensității curentului electric, adică: $p = u \cdot i$.

Dacă se înlocuiesc tensiunea și curentul cu valorile date de relațiile: $u(t) = U_m \sin \omega t$ și $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, atunci relația puterii instantanee devine:

$$p(t) = U_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.51)$$

Reprezentând grafic $u(t)$, $i(t)$ și $p(t)$, fig. 3.29, observăm că variația puterii în timp (curba $p(t)$) este dublu pulsativă. Puterea medie într-o perioadă se deduce din relația:

$$P_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \text{ sau } P_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t \pm \varphi) dt$$

Înlocuind pe U_m și I_m în funcție de valorile eficace și rezolvând integrala, găsim:

$$P_{med} = UI \cos \varphi \quad (3.52)$$

Dacă înlocuim în această relație pe U și $\cos \varphi$ cu valorile date de relațiile: $U = ZI$ și $\cos \varphi = \frac{r}{Z}$ găsim: $P_{med} = ZI^2 \frac{r}{Z} = rI^2$

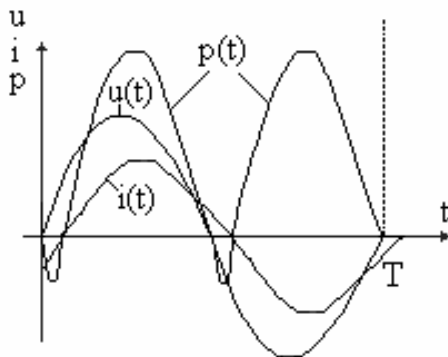


Fig. 3.29

Rezultă că puterea medie în curent alternativ reprezintă consumul prin efectul Joule-Lenz. Din această cauză puterea medie poartă numele de **putere activă** și se notează simplu P , adică:

$$P = rI^2 = UI \cos \varphi \quad (3.53)$$

Intensitatea curentului este decalată față de tensiune, în cele mai multe cazuri.

Dacă descompunem fazorul intensității în două componente,

una \bar{I}_a în fază cu \bar{U} și una \bar{I}_r perpendiculară pe \bar{U} (fig. 3.30), atunci putem scrie: $I_a = I \cos \varphi$ și $I_r = I \sin \varphi$

Multiplicând aceste relații cu U , obținem: $UI_a = UI \cos \varphi = P$ și

$$UI_r = UI \sin \varphi = Q \quad (3.54)$$

Prima relație reprezintă puterea activă, iar a doua reprezintă tot o putere care poartă numele de **putere reactivă**. Puterea activă se măsoară în wați, iar puterea reactivă se măsoară în volți amperi reactivi (prescurtat

VAR). Cele două componente I_a și I_r poartă numele de componenta activă (sau wattată) a curentului și componenta reactivă (sau dewattată). Produsul UI reprezintă tot o putere și poartă numele de **putere aparentă** (se notează S). Puterea aparentă se măsoară în volți amperi (prescurtat VA).

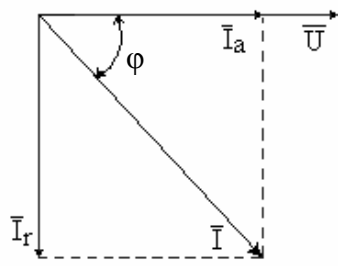


Fig.3.30

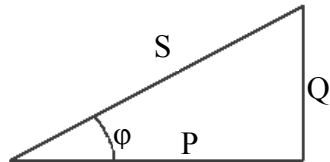


Fig.3.31

Cosinusul unghiului de decalaj dintre tensiune și intensitate cu care trebuie să multiplicăm puterea aparentă pentru a obține puterea activă se numește factor de putere.

Dacă facem suma pătratelor puterilor activă și reactivă, obținem:

$$P^2 + Q^2 = U^2 I^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = S^2$$

sau:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (3.55)$$

Relația aceasta se obține și din triunghiul puterilor reprezentat în fig.3.31, care se poate obține din triunghiul impedențelor, dacă multiplicăm laturile cu I^2 .

3.1.13. Îmbunătățirea factorului de putere

Un receptor în curent alternativ, poate fi alimentat de la o rețea la un anumit factor de putere. Cu cât factorul de putere va fi mai apropiat de unitate, cu atât curentul absorbit de receptor va fi mai apropiat de componenta activă a curentului, întrucât decalajul între tensiune și intensitate este mai mic. Adică, la aceeași putere activă, dacă tensiunea de alimentare a unui receptor este constantă, curentul absorbit de receptor de la rețea este cu atât mai mic cu cât decalajul între tensiune și curent este mai mic (fig.3.32). Întrucât pierderile de energie pe rețea, datorită efectului termic al curentului, sunt direct proporționale cu pătratul intensității curentului, trebuie ca factorul de putere al receptorului să fie cât mai apropiat de unitate. Uzina producătoare de energie electrică va funcționa cu un factor de putere mijlociu, deoarece receptorii conectați la rețea funcționează cu factori de putere diferiți.

Energia furnizată de uzina electrică este măsurată cu ajutorul contoarelor de energie activă, iar energia reactivă este măsurată cu contoare de energie reactivă. Notând cu W energia activă, cu W_r energia reactivă și cu W_a energia aparentă, putem scrie relațiile:

$$W = UIt \cdot \cos \varphi_{mijl} \text{ (KWh)}; W_r = UIt \cdot \sin \varphi_{mijl} \text{ (KVARh)}; W_a = UIt \text{ (KVAh)}$$

Factorul de putere mijlociu se calculează cu relația:

$$\cos \varphi_{mijl} = \frac{W}{W_a} = \frac{W}{\sqrt{W^2 + W_r^2}} \quad (3.56)$$

Întreprinderile furnizoare de energie electrică pot forța pe consumatori, prin penalizări, să lucreze cu un factor de putere cât mai apropiat de unitate.

Pentru îmbunătățirea factorului de putere există mai multe metode. Una din metode se bazează pe intercalarea unui condensator în paralel cu receptorul (fig. 3.33), care va fi prezentată mai jos. Celelalte metode bazate pe funcționarea mașinilor electrice, se vor aminti în capitolele respective (funcționarea mașinii sincrone în regim supraexcitat).

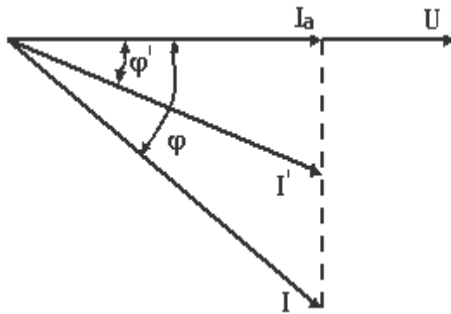


Fig.3.32

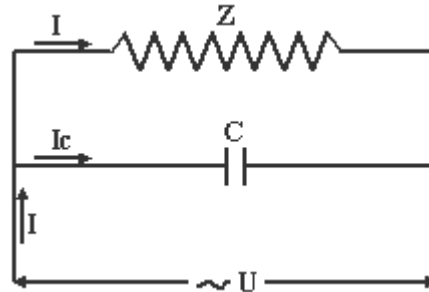


Fig.3.33

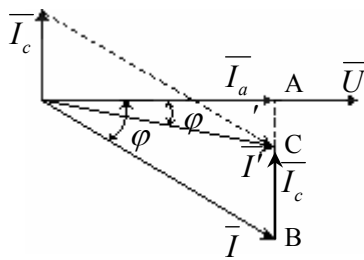


Fig.3.34

Dacă se dorește îmbunătățirea factorului de putere, spre exemplu, de la $\cos \varphi = 0,5$ la $\cos \varphi' = 0,92$, atunci relația capacității condensatorului se va determina astfel: din diagrama de fazori (fig.3.34), din triunghiul dreptunghic OAC, cateta \overline{AB} este egală cu $\overline{AC} + \overline{CB}$, și deci $I_c = \overline{CB} = I \sin \varphi - I' \sin \varphi'$. Însă

$I_c = U\omega C$ și deci:

$$C = \frac{I \sin \varphi - I' \sin \varphi'}{U\omega} \quad (3.57)$$

Relația (3.57) poate fi scrisă și sub forma:

$$C = \frac{P(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')}{U^2 \omega} \quad (3.58)$$

În circuitul din fig.3.33, dacă nu ar exista condensatorul C legat în paralel cu receptorul de impedanță Z, curentul absorbit de la rețea ar fi I, decalat în urmă cu unghiul φ . Pentru a face $\varphi = 0$ (curentul absorbit de la rețea să fie în fază cu tensiunea, adică $\cos \varphi = 1$), trebuie ca valoarea capacității condensatorului să fie astfel încât curentul capacitiv să fie dat de relația: $I_C = I \sin \varphi$ (fig.3.35).

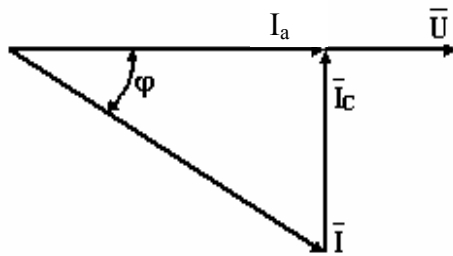


Fig.3.35

Curentul capacitiv mai este dat și de

$$\text{relația: } I_C = \frac{U}{X_C} = UC\omega$$

Egalând cele două relații, găsim:

$$C = \frac{I \sin \varphi}{\omega U} \quad (3.59)$$

$$C = \frac{UI \sin \varphi}{U^2 \omega} = \frac{Q}{U^2 \omega} = \frac{P \cdot \operatorname{tg} \varphi}{U^2 \omega} \quad (3.59^1)$$

3.1.14. Rezonanța în circuitele electrice

Întrucât reactanțele inductive și capacitive, precum și susceptanțele inductive și capacitive se pot compensa mutual, pot exista cazuri când în circuitul care conține elemente reactive, reactanța echivalentă sau susceptanța echivalentă să fie nulă și deci curentul să fie în fază cu tensiunea aplicată la bornele circuitului (impedanța echivalentă va fi egală cu rezistența activă). Vom spune, în acest caz, că în circuit există rezonanță. Rezonanța se poate întâlni și la circuitele care reprezintă porțiuni ale unor circuite mai complexe. Fenomenul de rezonanță are o importanță foarte mare și are aplicații multiple în dispozitivele electrotehnice.

3.1.14.1 Rezonanța circuitelor serie (rezonanța tensiunilor)

Să considerăm circuitul reprezentat în fig.3.20. Pentru reactanța acestui circuit avem relația:

$$X = X_L - X_C = L\omega - \frac{1}{C\omega}. \text{ Dacă } X_L = X_C \text{ sau } L\omega = \frac{1}{C\omega}, \text{ avem}$$

îndeplinită condiția de rezonanță întrucât vom avea $Z = r$ și deci curentul va fi în fază cu tensiunea. Diagrama de fazori la rezonanță este reprezentată în fig.3.36. Din egalitatea reactanței inductive cu reactanța

$$\text{capacitivă, rezultă: } \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}; L = \frac{1}{C\omega_r^2}; C = \frac{1}{L\omega_r^2} \quad (3.60)$$

adică rezonanța se poate realiza variind fie frecvența tensiunii aplicată la bornele circuitului, fie inductanța bornei, fie capacitatea condensatorului.

Dacă tensiunea aplicată la bornele circuitului nu variază, curentul în circuit va avea valoarea maximă la rezonanță și egală cu:

$$I_{\max} = \frac{U}{Z_{\min}} = \frac{U}{r}$$

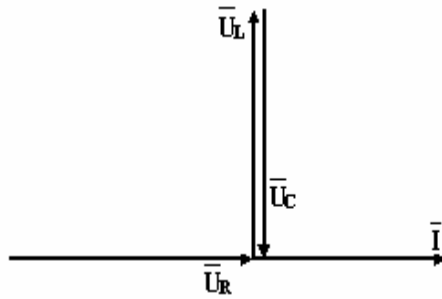


Fig.3.36

Pulsăția ω_r la care se produce rezonanța poartă numele de pulsație de rezonanță, iar frecvența corespunzătoare $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ poartă numele de frecvență de rezonanță.

Din diagramele de fazori se observă că, la rezonanță, fazorii \overline{U}_L

și \overline{U}_C sunt egali și de sens contrar, iar \overline{U}_r este egal cu $r\overline{I}$. S-ar putea întâmpla ca fazorii \overline{U}_L și \overline{U}_C să fie mai mari decât \overline{U}_r , adică tensiunile la bornele inductanței și la bornele condensatorului să fie mai mari decât tensiunea aplicată la bornele circuitului.

Rezonanța în cazul circuitelor serie poartă numele de rezonanță tensiunilor.

Raportul dintre tensiunea la bornele circuitului și oricare tensiune reactivă, la rezonanță, este: $\frac{U}{U_L} = \frac{RI}{X_L I} = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{X_C} = \frac{R}{Z_C}$

unde Z_C poartă numele de impedanță caracteristică și este dată de relația:

$$Z_C = L\omega_r = \frac{1}{C\omega_r} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot L = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{Din egalitatea rapoartelor: } \frac{U}{U_L} = \frac{R}{Z_C}$$

se observă că $U_L = U \cdot \frac{Z_C}{R}$ și deci, atunci când $Z_C > R$ tensiunea inductivă și cea capacitivă sunt de $\frac{Z_C}{R}$ ori mai mare decât tensiunea aplicată la bornele circuitului.

Prin urmare, la rezonanța de tensiune, în diferitele porțiuni ale circuitului pot să apară tensiuni mai mari decât tensiunea aplicată la bornele acestuia. Dacă $Z_C \gg R$ atunci U_L și U_C pot atinge valori periculoase pentru izolația bobinelor și dielectricilor condensatoarelor.

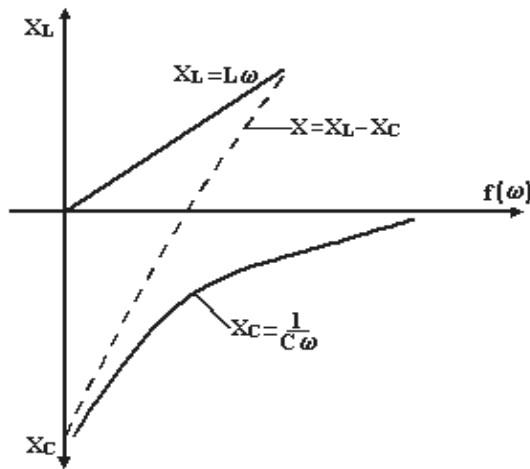


Fig.3.37

Obținerea rezonanței de tensiune prin variația capacității C se întrebuintează pe scară largă la reglajul aparatelor de radio al căror circuit oscilant este acordat prin variația capacității unui condensator variabil, până când circuitul intră în rezonanță cu frecvența unei receptoare, a cărei amplificare se urmărește.

Variația reactanțelor în funcție de frecvența f a

tensiunii aplicate este reprezentată în fig.3.37.

Variația tensiunilor, curentului și decalajului în funcție de

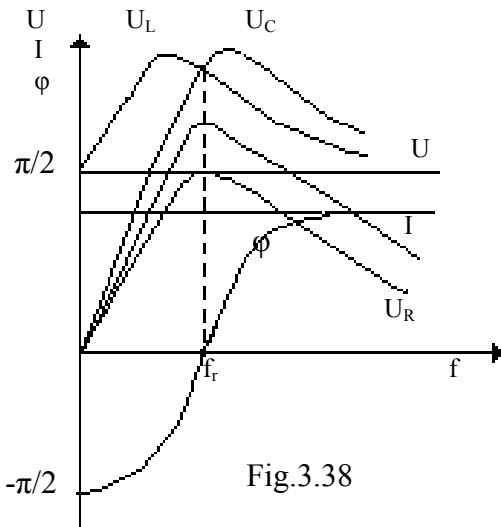


Fig.3.38

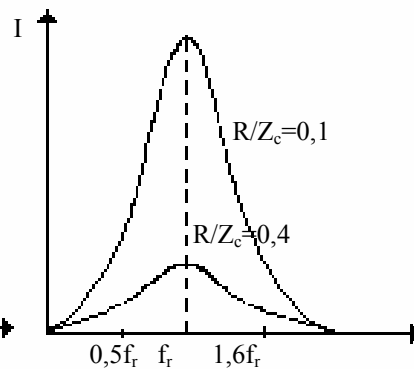


Fig.3.39

frecvență este reprezentată în fig.3.38, iar în fig.3.39 sunt date curbele de variație ale curentului în funcție de frecvența f a tensiunii aplicate, pentru două valori ale raportului R/Z_c . Se observă că, cu cât raportul R/Z_c este mai mic cu atât valoarea maximă a curentului de rezonanță se manifestă mai puternic și în limite ale frecvențelor mai strânse.

3.1.14.2 Rezonanța circuitelor derivație (rezonanța curenților)

Să studiem conectarea în paralel a două laturi, care posedă rezistențele active r_1 și r_2 și reactanțele $X_L = L\omega$ și $X_C = \frac{1}{C\omega}$

(fig.3.40). Rezistențele r_1 și r_2 sunt astfel alese încât fazorul curentului I , în porțiunea neramificată a circuitului să fie în fază cu fazorul tensiunii U (fig.3.41). În acest caz vom avea rezonanță și anume rezonanța

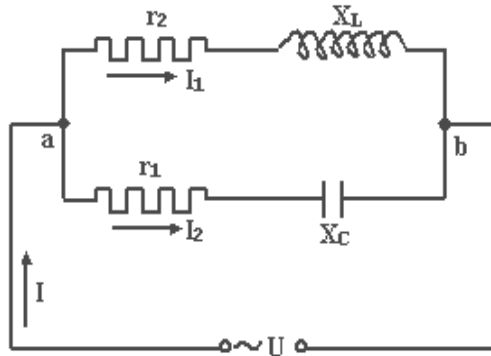


Fig.3.40

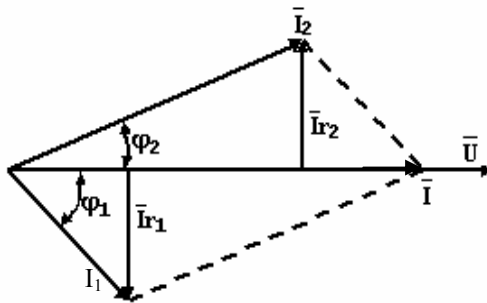


Fig.3.41

curenților. Pentru a îndeplini condiția de rezonanță trebuie ca, componentele reactive ale celor doi curenți să fie egale, adică $I_{r1} = I_{r2}$ sau se mai poate scrie:

$$I_1 \sin \varphi_1 = I_2 \sin \varphi_2.$$

Se știe că $\sin \varphi = \frac{X}{Z}$ și

$$I = \frac{U}{Z}.$$

Deci relația de mai sus se mai poate scrie:

$$\frac{X_1}{Z_1} \cdot \frac{U}{Z_1} = \frac{X_2}{Z_2} \cdot \frac{U}{Z_2} \quad \text{sau:}$$

$$\frac{L\omega}{r_1^2 + L^2\omega^2} = \frac{1}{r_2^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$$

Din ultima relație, rezultă ω_r (pulsatia la rezonanță), respectiv f_r (frecvența de rezonanță)

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{r_1^2 - \frac{L}{C}}{r_2^2 - \frac{L}{C}}} \quad (3.61)$$

3.2. Circuite electrice trifazate

3.2.1. Sisteme de mărimi polifazate

Un sistem de m mărimi care au aceeași lege de variație și aceeași frecvență se numește sistem *polifazat de mărimi* sau sistem *m-fazat*. Mărimile sistemului polifazat pot diferi între ele ca amplitudine sau ca fază. De exemplu, un sistem *m-fazat de tensiuni sinusoidale* este format din mărimile:

$$\begin{aligned} e_1 &= E_{1m} \sin \omega t \\ e_2 &= E_{2m} \sin(\omega t - \alpha_1) \\ e_3 &= E_{3m} \sin(\omega t - \alpha_2) \\ &\vdots \\ e_m &= E_{mm} \sin(\omega t - \alpha_m) \end{aligned} \quad (3.62)$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ reprezintă unghiurile de decalaj dintre prima înfășurare și a doua, a treia, etc., așa cum se arată în fig. 3.42.

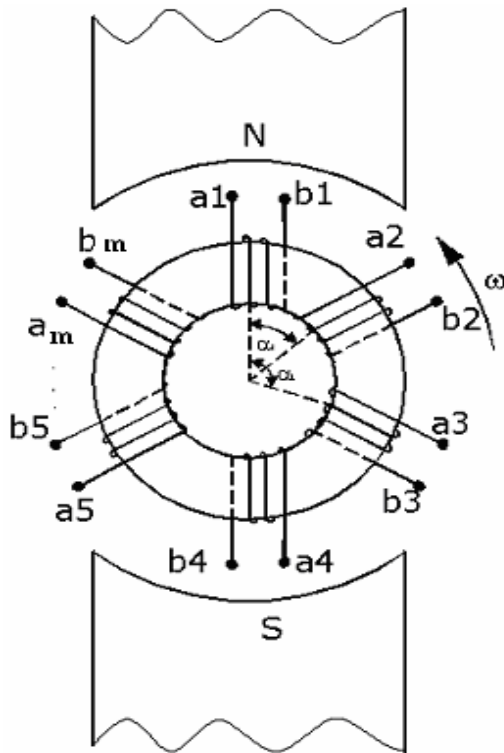


Fig.3.42

Un sistem polifazat se poate obține dacă pe circumferința rotorului (indusului) unui generator ce se rotește într-un câmp magnetic, se plasează atâtea înfășurături sau bobine, decalate în spațiu una față de alta, câte faze sunt în sistem. Tensiunile electromotoare induse în aceste înfășurări vor avea aceeași frecvență, însă vor fi defazate una față de alta.

Sistemele polifazate pot fi împărțite în: - sisteme *simetrice și nesimetrice*; - sisteme *independente* (separate) și *interconectate* (cuplate); - sisteme *echilibrate și neechilibrate*. Un sistem de tensiuni este simetric atunci

când, toate tensiunile au aceeași amplitudine și păstrează același defazaj $\alpha = \frac{2\pi}{m}$, între oricare două mărimi consecutive ale sistemului, în care m reprezintă numărul de faze. Într-un astfel de sistem, valorile instantanee ale t.e.m. din diferite faze se exprimă prin relațiile:

$$\begin{aligned} e_1 &= E_m \sin \omega t \\ e_2 &= E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{m}\right) \\ e_3 &= E_m \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{m}\right) \\ &\vdots \\ e_m &= E_m \sin\left[\omega t - (m-1)\frac{2\pi}{m}\right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Aceste t.e.m. pot fi reprezentate cu ajutorul fazorilor, decalati unul în raport cu celălalt cu același unghi $2\pi/m$ (fig. 3.43a.), sau cu ajutorul sinusoidelor.

Porțiunile circuitelor prin care trec curenți de aceeași fază se numesc **faze**. Curenții, căderile de tensiune și tensiunile electromotoare ce acționează în faze se numesc **mărimi de fază**.

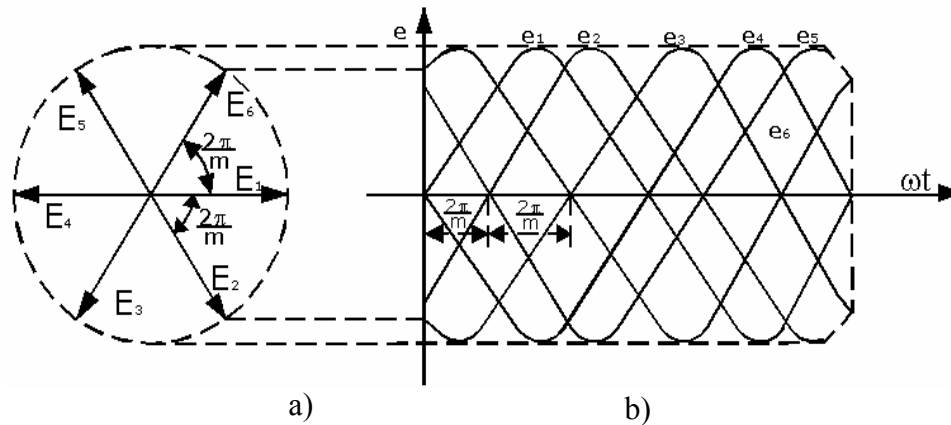


Fig. 3.43

3.2.2. Sisteme trifazate

În practică se utilizează aproape în exclusivitate sistemele trifazate de tensiuni electromotoare (t.e.m.), iar circuitele în care acționează acestea se numesc circuite trifazate. Larga utilizare a

circuitelor trifazate se explică prin: transportul economic al energiei electrice, realizarea de cele mai robuste și economice motoare electrice (motoarele asincrone trifazate), utilizarea de circuite de alimentare separate pentru două sau trei receptoare etc.. În centralele electrice energia electrică se obține cu ajutorul generatoarelor sincrone trifazate.

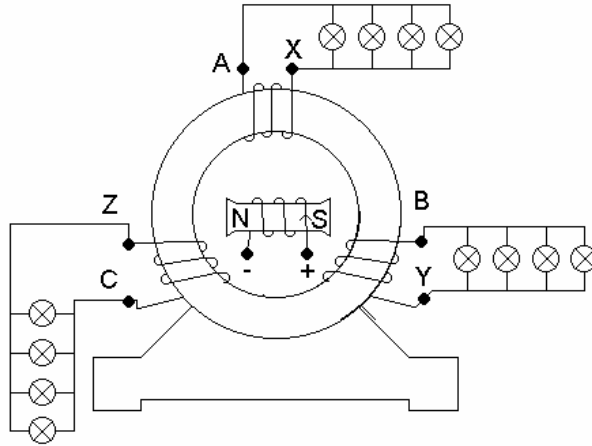


Fig.3.44

Construcția unui generator sincron de curent alternativ trifazat este reprezentată schematic în fig.3.44. Statorul generatorului (reprezintă indusul mașinii) are trei înfășurări A-X; B-Y; C-Z plasate pe un circuit magnetic de formă cilindrică, confecționat din tole de oțel electrotehnic iar rotorul (inductorul mașinii) are o înfășurare de curent

continuu ce se găsește pe un circuit magnetic. În timpul rotirii rotorului, în înfășurările statorului se induc trei tensiuni electromotoare egale în valoare absolută, însă defazate cu un unghi de $2\pi/3$, două câte două. Dacă luăm ca origine a timpului momentul când t.e.m. din prima înfășurare A-X trece prin zero, avem relațiile:

$$\begin{aligned}
 e_A &= E_m \sin \omega t \quad \text{sau} \quad \underline{E} = E e^{j0} = E \\
 e_B &= E_m \sin\left(\omega \cdot t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{sau} \quad \underline{E}_B = E e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\
 e_C &= E_m \sin\left(\omega \cdot t - \frac{4\pi}{3}\right) = E_m \sin\left(\omega \cdot t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{sau} \quad \underline{E}_C = E e^{j\frac{2\pi}{3}}
 \end{aligned}
 \tag{3.64}$$

Tensiunile electromotoare e_A , e_B și e_C , care reprezintă valorile instantanee, variază după curbele din fig.3.45b, iar reprezentarea fazorială este dată de fig. 3.45a.

Bornele A, B și C ale înfășurărilor statorului sunt considerate ca începuturile fazelor, iar bornele X, Y și Z, sfârșiturile fazelor.

Dacă fiecare fază debitează un curent în circuitul exterior, la bornele fiecărei faze vom avea o tensiune, care se numește tensiune pe fază.

Dacă cele trei faze sunt încărcate uniform, adică curenții debitați sunt egali ca mărime, amplitudinile tensiunilor pe fază vor fi egale în valoarea absolută și vom avea de-a face cu un sistem echilibrat. La o încărcare uniformă a circuitelor, defazarea între fazorii tensiunilor pe

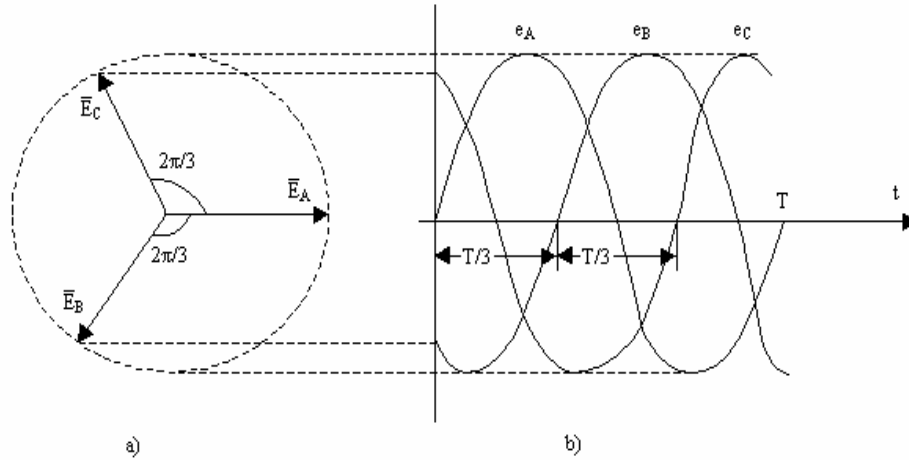


Fig. 3.45

fază \overline{U}_A , \overline{U}_B și \overline{U}_C va fi aceeași egală cu $2\pi/3$. Prin urmare se pot scrie următoarele expresii pentru valorile instantanee ale tensiunilor pe fază:

$$\begin{aligned} u_A &= U_m \sin \omega t \\ u_B &= U_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ u_C &= U_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Exprimând valorile eficace ale tensiunilor pe fază sub formă simbolică, se obțin următoarele relații:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= U e^{j0} = \underline{U} \\ \underline{U}_B &= \underline{U} e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \underline{U} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \underline{U} \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\underline{U}_C = \underline{U} e^{+j\frac{2\pi}{3}} = \underline{U} \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Din fig.3.45 se observă că suma $e_A + e_B + e_C$ sau $\bar{E}_A + \bar{E}_B + \bar{E}_C$ este zero și de asemenea $\bar{E}_A + \bar{E}_B + \bar{E}_C = 0$.

Cele trei faze ale sistemului trifazat se pot conecta în două feluri : în stea și în triunghi.

3.2.2.1. Conexiunea în stea

Dacă sfârșitul înfășurărilor celor trei faze (X, Y, Z) le conectăm la un punct comun O, care poartă numele de punct de nul sau punct neutru, se obține un sistem de curenți trifazat conectat în stea. Această conexiune poate fi reprezentată schematic ca în fig. 3.46, în care de la punctul neutru pleacă un al patrulea conductor.

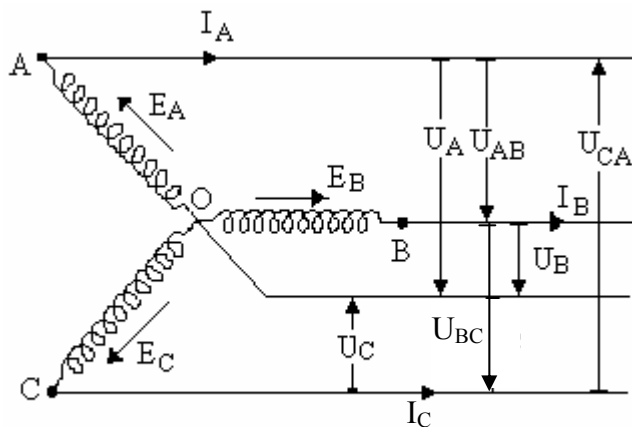


Fig.3.46

Conductoarele care pleacă de la fiecare fază poartă numele de conductoare de linie, iar conductorul care pleacă de la punctul neutru poartă numele de conductor de nul sau conductor neutru.

În cazul unei încărcări uniforme a fazelor, conductorul neutru nu este necesar, deoarece în acest caz curentul din

el este nul.

Curenții din cele trei faze vor fi:

$$\begin{aligned} i_1 &= I_m (\sin \omega t - \varphi) \\ i_2 &= I_m \left(\sin \omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3} \right) \\ i_3 &= I_m \left(\sin \omega t - \varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Sistemul fiind simetric și echilibrat vom avea: $i_1 + i_2 + i_3 = 0$

Dacă exprimăm cei trei curenți simbolic și luăm curentul I_1 , ca origine de fază, avem:

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= I e^{j0} = I \\ \underline{I}_2 &= I e^{-j\frac{2\pi}{3}} = I \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \underline{I}_3 &= I e^{+j\frac{2\pi}{3}} = I \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)\end{aligned}\quad (3.68)$$

Suma $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$, trebuie să aibă valoarea zero. Într-adevăr:

$$I + I \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + I \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

Tensiunile U_A , U_B și U_C măsurate între conductoarele de linie și conductorul neutru poartă numele de tensiuni de fază, iar tensiunile U_{AB} , U_{BC} și U_{CA} măsurate între conductoarele de linie, poartă numele de tensiuni de linie sau tensiuni între faze.

Valoarea instantanee a tensiunii între faze, este diferența între valorile instantanee ale tensiunilor pe fază, adică:

$$u_{AB} = u_A - u_B; u_{BC} = u_B - u_C; u_{CA} = u_C - u_A \quad (3.69)$$

sau, sub formă complexă:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B; \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A \quad (3.70)$$

Reprezentând fazorial relațiile de mai sus, găsim diagrama de fazori a tensiunilor de linie (fig.3.47). Dacă exprimăm mărimea tensiunii de linie față de cea de fază, obținem relația:

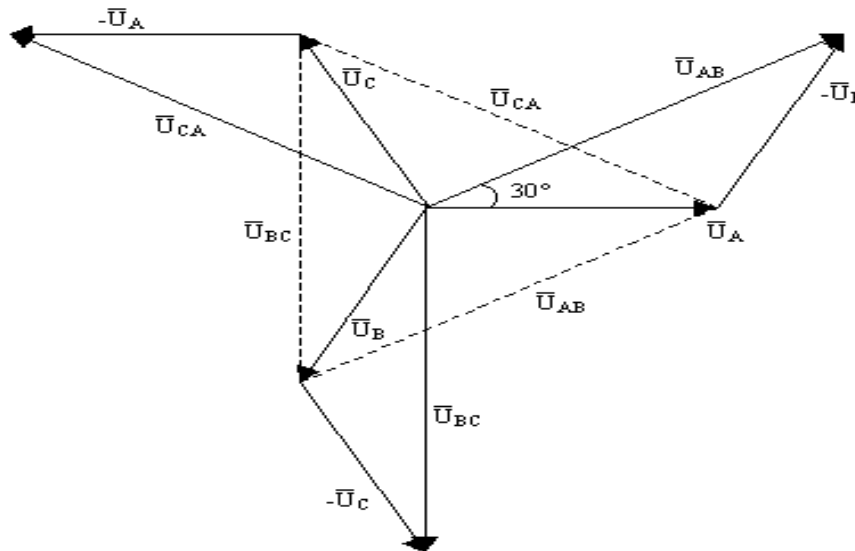


Fig. 3.47

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = U_f - U_f e^{-j\frac{2\pi}{3}} = U_f \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right)$$

Dacă sistemul este simetric și echilibrat, atunci avem:

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_l \text{ și } U_A = U_B = U_C = U_f$$

Deci putem scrie:

$$\underline{U}_l = \underline{U}_f \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right) = \underline{U}_f \left(1 + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} \underline{U}_f \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right)$$

sau:
$$\underline{U}_l = \sqrt{3} \underline{U}_f e^{+j\frac{\pi}{6}} \quad (3.71)$$

Rezultă că tensiunea de linie este de $\sqrt{3}$ ori mai mare decât tensiunea pe fază de și decalată înainte cu $\pi/6$ față de aceasta.

Din examinarea schemei din fig. 3.48, se observă că intensitatea curentului care circulă prin înfășurările fazelor este egală cu intensitatea curentului care circulă prin conductoarele de linie, adică se poate scrie relația: $I_f = I_l$.

Pentru o încărcare uniformă a fazelor ($I_A = I_B = I_C = I_f$ și $I_1 = I_2 = I_3 = I_l$), conductorul neutru poate fi scos din schemă fără a se influența funcționarea instalației.

Câteodată, punctul neutru este pus la pământ și în cazul acesta conexiunea se numește stea cu neutru pus la pământ. În cazul încărcării uniforme a fazelor, lipsa curentului în conductorul neutru poate fi

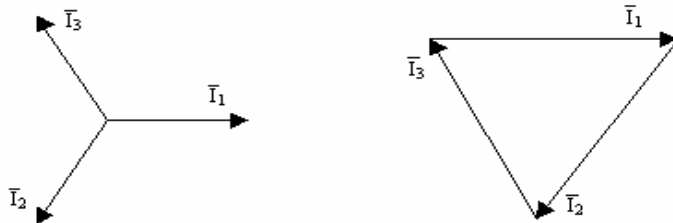


Fig. 3.48

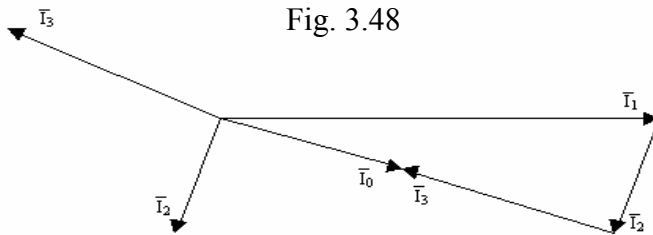


Fig. 3.49

constatată și prin însumarea geometrică a fazorilor curentilor de fază (ca

urmare a însumării se obține un triunghi închis – fig. 3.48). În practică însă, nu totdeauna fazele sunt uniform încărcate, în special în cazul unei sarcini de iluminat. În asemenea cazuri este nevoie de cel de-al patrulea conductor, care servește pentru trecerea curentului de egalizare.

Acest curent de egalizare poate fi determinat tot prin însumarea vectorială a fazorilor curenților și valoarea acestui curent va fi dată de latura care închide poligonul astfel construit (fig. 3.49). Adică se poate scrie relația, sub formă vectorială:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{I}_0 \quad (3.72)$$

Relația (3.72) poate fi rezolvată și prin metoda simbolică, exprimând curenții sub formă complexă, adică: $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_0$

3.2.2.2. Conexiunea în triunghi

Dacă legăm sfârșitul primei înfășurări X cu începutul înfășurării a doua B, sfârșitul înfășurării a doua Y cu începutul înfășurării a treia C și sfârșitul înfășurării a treia Z cu începutul primei înfășurări A, cum se

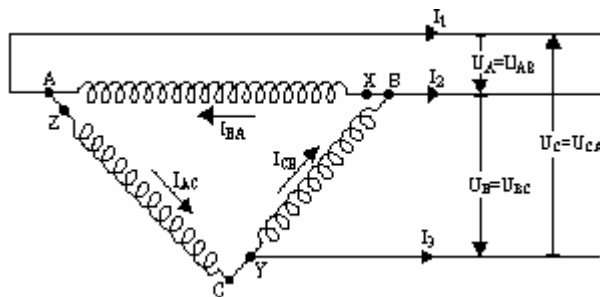


Fig.3.50

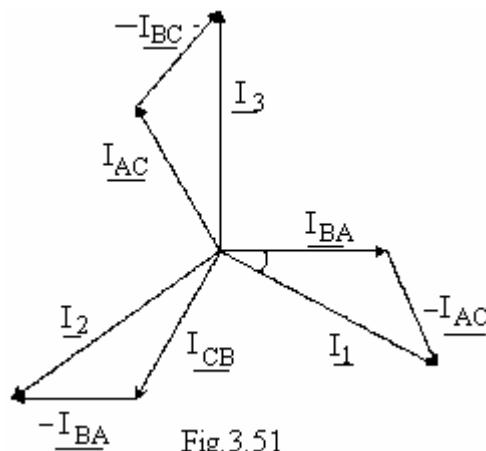


Fig. 3.51

arată schematic în fig.3.50, obținem un sistem trifazat cu conexiunea înfășurărilor în triunghi.

Din examinarea schemei se observă că în cazul când un sistem echilibrat are conexiunea în triunghi, tensiunea între faze este egală cu tensiunea pe fază, adică: $U_l = U_f$

În ceea ce privește curenții de linie față de curenții pe fază, putem scrie următoarele relații, aplicând teorema I a lui Kirchhoff în nodurile A, B și C:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_{BA} - \underline{I}_{AC} \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_{CB} - \underline{I}_{BA} \\ \underline{I}_3 &= \underline{I}_{AC} - \underline{I}_{CB} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Dacă sistemul trifazic este simetric și echilibrat,

atunci: $I_1=I_2=I_3=I_l$ și $I_{BA}=I_{CB}=I_{AC}=I_f$.

Rezolvând fazorial cele trei relații, găsim diagrama de fazori a curenților, reprezentată în fig. 3.51. Rezolvând simbolic una din relațiile

$$(3.73) \text{ vom găsi: } \underline{I}_l = \underline{I}_f \cdot e^{j0^\circ} - \underline{I}_f e^{j\frac{2\pi}{3}} = \underline{I}_f \left(1 - e^{j\frac{2\pi}{3}} \right) \text{ sau}$$

$$\underline{I}_l = \underline{I}_f \left(1 + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}\underline{I}_f \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3}\underline{I}_f e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

Rezultă că: $I_l = \sqrt{3}I_f$, adică curentul de linie în cazul conexiunii în triunghi este de $\sqrt{3}$ ori mai mare decât curentul de fază și decalat cu unghiul de $\frac{\pi}{6}$ în urmă față de acesta.

3.2.3. Puterile electrice în circuite trifazate

Calculul puterii în sistemele trifazate se face după aceleași principii ca în curent alternativ monofazat. Deoarece un sistem trifazat reprezintă un ansamblu de trei faze, puterea acestui sistem se determină ca sumă a puterilor celor trei faze.

Notând cu U_A , U_B și U_C valorile eficace ale tensiunilor de fază, cu I_A , I_B și I_C valorile eficace ale curenților de fază și cu φ_A , $\cos\varphi_B$ și $\cos\varphi_C$ factorii de putere ai fazelor respective, rezultă că puterea totală a sistemului trifazat va fi:

$$P = U_A I_A \cos\varphi_A + U_B I_B \cos\varphi_B + U_C I_C \cos\varphi_C \quad (3.74)$$

Dacă sistemul este simetric și echilibrat, atunci avem:

$$U_A = U_B = U_C = U_f ; I_A = I_B = I_C = I_f \text{ și}$$

$$\cos\varphi_A = \cos\varphi_B = \cos\varphi_C = \cos\varphi$$

$$\text{Rezultă : } P = 3U_f I_f \cos\varphi \quad (3.75)$$

În cazul conectării în stea $I_f = I_l$ și $U_f = U_l / \sqrt{3}$. Înlocuind aceste valori în relația (3.75) găsim expresia puterii în funcție de tensiunea de linie și curentul de linie, care este:

$$P = \sqrt{3}U_l I_l \cos\varphi \quad (3.76)$$

În cazul conectării în triunghi $U_f = U_l$ și $I_f = I_l / \sqrt{3}$. Introducând aceste valori în relația (3.75), găsim: $P = \sqrt{3}U_l I_l \cos\varphi$ adică aceeași expresie ca și în cazul conectării în stea.

Procedând în mod analog, găsim expresia puterii reactive în circuite electrice trifazate, care va fi dată de expresia:

$$Q = 3U_f I_f \sin\varphi \text{ sau } Q = \sqrt{3}U_l I_l \sin\varphi \quad (3.77)$$

Pentru puterea aparentă vom avea:

$$S = 3U_f I_f \text{ sau } S = \sqrt{3}U_l I_l \quad (3.78)$$

Unitățile de măsură pentru puterea activă, reactivă și aparentă sunt cele date la curentul alternativ monofazat.

Dacă tensiunile și curenții sunt exprimați cu ajutorul numerelor complexe, puterea aparentă se calculează direct cu relația:

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U}_A \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \underline{I}_C^*$$

3.2.4. Conectarea receptoarelor la rețelele electrice trifazate.

3.2.4.1 Conectarea în stea

Conectarea în stea se poate realiza nu numai cu înfășurările generatoarelor trifazate, ci și cu receptoare de energie, precum: lămpi cu

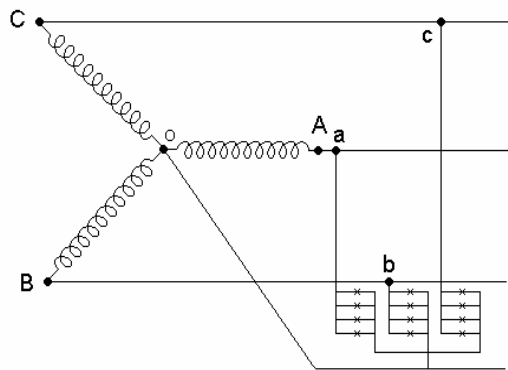


Fig.3.52

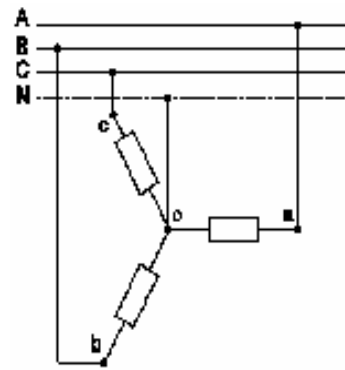


Fig.3.53

incandescentă, înfășurările electromotoarelor trifazate, înfășurările transformatoarelor trifazate, etc.

Conectarea în stea, la sistemul cu trei conductoare, a unei sarcini de iluminat, se folosește numai în cazuri excepționale când curentul în fiecare fază este identic. De obicei, pentru alimentarea instalațiilor de iluminat se folosește sistemul de patru conductoare (cu conductorul neutru). Schema de conectare este dată în fig. 3.52. Schematic, o rețea de curent alternativ trifazat cu conductorul neutru se reprezintă ca în fig.3.53, la care s-a conectat în stea un receptor oarecare.

În cazul conexiunii stea se știe că intensitatea curentului de linie este egală cu intensitatea curentului de fază. În sistemele echilibrate tensiunile pe fază sunt egale ca mărime și decalate unele față de altele cu

aceiași unghi $\frac{2\pi}{3}$ rad. Când încărcarea pe faze nu este uniformă, curenții și tensiunile pe cele trei faze nu mai sunt egale. În asemenea cazuri folosirea sistemului în stea cu trei conductori este nerațională, deoarece în momentul distrugerii simetriei, unele faze vor fi supuse unor tensiuni mărite, iar altele unor tensiuni scăzute. Când există conductorul neutru, nesimetria sistemului se micșorează.

Să considerăm un generator trifazat conectat în stea cu t.e.m. pe fiecare fază E_A , E_B și E_C , care alimentează un receptor trifazat conectat în stea, cu fazele neechilibrate (fig. 3.54).

Notăm impedanțele fazelor generatorului cu Z_A , Z_B și Z_C , impedanțele conductoarelor de legătură cu Z_1 , Z_2 și Z_3 , respectiv Z_0 , iar impedanțele fazelor receptorului ca Z_a , Z_b și Z_c .

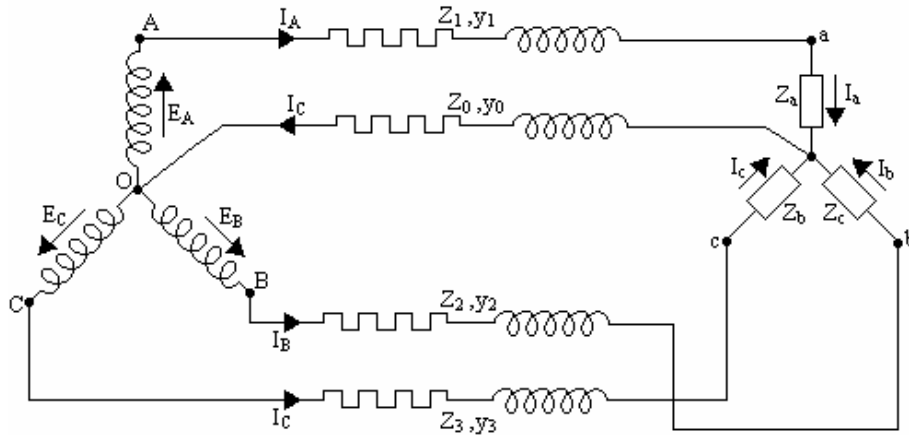


Fig. 3.54

Impedanțele totale ale fazelor vor fi: $\underline{Z}_I = \underline{Z}_A + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_a$;
 $\underline{Z}_{II} = \underline{Z}_B + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_b$; $\underline{Z}_{III} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_c$
 Admitanțele totale le vom nota cu Y_I , Y_{II} și Y_{III} . Impedanța și admitanța conductorului neutru le vom nota cu Z_0 , Y_0 , iar cu U_0 vom nota tensiunea între punctele neutre ale generatorului și receptorului.

În acest caz, căderea de tensiune pe fiecare fază se va exprima prin relațiile:

$$\underline{U}_I = \underline{E}_A - \underline{U}_0; \quad \underline{U}_{II} = \underline{E}_B - \underline{U}_0; \quad \underline{U}_{III} = \underline{E}_C - \underline{U}_0 \quad (3.79)$$

Curenții care circulă prin fiecare fază vor fi:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{U}_I Y_I = (\underline{E}_A - \underline{U}_0) Y_I \\ \underline{I}_B &= \underline{U}_{II} Y_{II} = (\underline{E}_B - \underline{U}_0) Y_{II} \\ \underline{I}_C &= \underline{U}_{III} Y_{III} = (\underline{E}_C - \underline{U}_0) Y_{III} \\ &\text{și } \underline{I}_0 = \underline{U}_0 Y_0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Conform teoremei I-a a lui Kirchoff:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \underline{I}_0$$

Înlocuind, în această relație curenții cu expresiile (3.72) găsim:

$$(\underline{E}_A - \underline{U}_0) \underline{Y}_I + (\underline{E}_B - \underline{U}_0) \underline{Y}_{II} + (\underline{E}_C - \underline{U}_0) \underline{Y}_{III} = \underline{U}_0 \underline{Y}_0$$

Din această condiție scoatem valoarea tensiunii punctului neutru care este:

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_I + \underline{E}_B \underline{Y}_{II} + \underline{E}_C \underline{Y}_{III}}{\underline{Y}_I + \underline{Y}_{II} + \underline{Y}_{III} + \underline{Y}_0} \quad (3.81)$$

Dacă conductorul neutru lipsește sau este rupt, $Y_0=0$ și U_0 va fi mai mare decât tensiunea U_0 dată de relația (3.81), de unde rezultă că

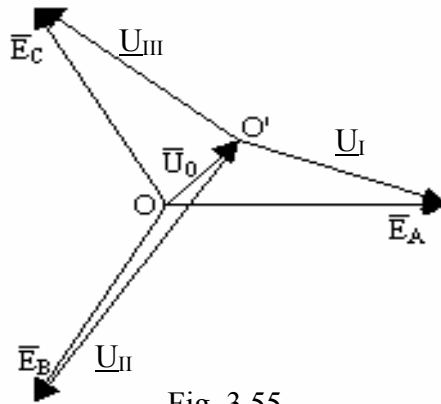


Fig. 3.55

nesimetria sistemului trifazic este mai mare în cazul în care lipsește conductorul neutru sau este rupt. Din această cauză, la sistemele trifazate cu patru fire, pe conductorul neutru nu se intercalează nici întrerupător și nici siguranță.

Diagrama de fazori a tensiunilor pe fazele receptorului este reprezentată în fig. 3.55

Pentru calcularea curenților, după aflarea tensiunii punctului neutru,

ne întoarcem la relațiile (3.79) și (3.80).

Tensiunile pe fază la bornele generatorului le calculăm cu ajutorul relațiilor:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{I}_A (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_a) + \underline{U}_0 = \underline{E}_A - \underline{Z}_A \underline{I}_A \\ \underline{U}_B &= \underline{I}_B (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_b) + \underline{U}_0 = \underline{E}_B - \underline{Z}_B \underline{I}_B \\ \underline{U}_C &= \underline{I}_C (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_c) + \underline{U}_0 = \underline{E}_C - \underline{Z}_C \underline{I}_C \end{aligned} \quad (3.82)$$

Tensiunile la bornele receptorului vor fi:

$$\underline{U}_a = \underline{I}_A \underline{Z}_a ; \underline{U}_b = \underline{I}_B \underline{Z}_b ; \underline{U}_c = \underline{I}_C \underline{Z}_c \quad (3.83)$$

3.2.4.2. Conectarea în triunghi

La conectarea în triunghi a receptorilor de energie, fiecare fază a receptorului este pusă sub tensiune de linie. La o încărcare uniformă a fazelor, curenții în fazele receptorului sunt de $\sqrt{3}$ ori mai mici decât curenții de linie.

În cazul unei încărcături neuniforme a fazelor receptorului, curenții în conductoarele de linie nu sunt egali între ei și prin urmare căderile de tensiune în linie, vor fi de asemenea diferite. La rezolvarea problemelor privitoare la distribuția curenților în asemenea rețele este necesar ca triunghiul receptorului să fie transfigurat într-o stea echivalentă, iar apoi la impedanțele de fază ale acestei stele să fie adăugate impedanțele conductoarelor de linie și impedanțele fazelor generatorului.

Pentru trecerea de la conexiunea în triunghi la cea în stea (fig.3.54) se folosesc relațiile (3.84), care sunt asemănătoare cu relațiile de la rezolvarea circuitelor de curent continuu prin metoda transfigurății numai că se utilizează valorile complexe ale mărimilor.

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{Z}_{ab} \cdot \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \underline{Z}_b = \frac{\underline{Z}_{bc} \cdot \underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_{ca} \cdot \underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}} \quad (3.84)$$

Tensiunea punctului neutru, curenții în conductoarele de linie, tensiunile la bornele generatorului și căderile de tensiune pe fazele stelei echivalente a receptorului se calculează după relațiile (3.79), (3.80), (3.81), (3.83). Tensiunile între faze, la bornele receptorului, se vor calcula cu ajutorul relațiilor următoare:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_a - \underline{U}_b; \quad \underline{U}_{bc} = \underline{U}_b - \underline{U}_c; \quad \underline{U}_{ca} = \underline{U}_c - \underline{U}_a. \quad (3.85)$$

iar curenții în fazele receptorului se vor calcula cu ajutorul relațiilor:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} \quad (3.86)$$