CAP. 1. CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT CONTINUU

Studiul circuitelor electrice de curent continuu se face în cadrul electrocineticii. Electrocinetica este acea parte din electromagnetism care studiază stările electrice ale conductoarelor parcurse de curent electric de conducție.

Câmpul electromagnetic este o formă aparte de existență a materiei, diferită de substanța corpurilor, care se caracterizează prin faptul că exercită asupra corpurilor, acțiuni pondero-motoare (forțe şi momente) de natură electromagnetică.

În acest capitol se vor studia fenomenele electrice staționare, caracterizate prin mărimi invariabile în timp.

1.1. Câmpuri electrice imprimate

Experimental s-a constatat că la un sistem de corpuri metalice, electroliți sau gaze ionizate, legate între ele prin medii conductoare şi conectate la o sursă de energie electrică, apare o circulație a purtătorilor de sarcini electrice (electroni liberi în metale, ioni în electroliți şi gaze), numită **curent electric**.

Deplasarea purtătorilor de sarcini electrice este întotdeauna însoțită de dezvoltarea unei energii în mediile prin care circulă. Spre deosebire de regimul electrostatic al câmpului electromagnetic, energia dezvoltată se poate transforma în alte forme de energie. Prezența curentului electric este însoțită de căldură, energie mecanică, chimică, magnetică, etc..

În regim electrocinetic conductoarele nu sunt în echilibru electric, întrucât în interiorul conductorului câmpul electric este diferit de zero. Starea electrocinetică a câmpului electromagnetic poate fi menținută numai dacă se cheltuieşte o anumită cantitate de energie, de altă natură decât electrică. Câmpul electric obținut prin consumul unei energii de altă natură decât cea electrică (câmp care imprimă purtătorilor de sarcină electrică o mişcare ordonată), se numeşte **câmp electric imprimat.**

Câmpul electric imprimat are două aspecte:

- câmp electric imprimat propriu-zis care generează curent electric constant în timp;

- câmp electric solenoidal care generează curent electric variabil în timp .

Câmpul electric imprimat se defineşte prin relaţia:

$$\overline{E_i} = \frac{\overline{F_i}}{q} \tag{1.1}$$

unde: $\overline{F_i}$ este forţa imprimată purtătorului de sarcină q.

Spre deosebire de câmpul electrostatic, circulaţia câmpului electric imprimat pe o curbă Γ închisă aste diferită de zero. Această circulaţie se numeşte **tensiune electromotoare** a sursei de energie electrică:

$$\oint_{\Gamma} E_i dl = e \tag{1.2}$$

unde: e - este tensiunea electromotoare (t.e.m).

Câmpurile imprimate se pot obţine prin diverse procedee:

a.) Reacţii electrochimice între metale şi soluţii, principiu ce stă la baza construirii pilelor electrochimice şi a acumulatorilor.

Aceste câmpuri imprimate se mai numesc şi **câmpuri galvanice.**

b.) Prin încălzirea contactului dintre două metale diferite (termocuplul). Pe acest principiu se obţin **câmpuri imprimate termoelectrice.**

c.) Prin iradierea unei joncţiuni semiconductor-metal. Pe acest principiu se obţin **câmpuri imprimate fotoelectrice**.

1.2. Curentul electric

Curentul electric reprezintă deplasarea ordonată a purtătorilor de sarcini electrice printr-un mediu adus în stare de conducţie. După natura mediului prin care circulă purtătorii de sarcină, curentul electric poate fi: de *conducţie*, de *deplasare*, de *convecţie şi curentul Röntgen teoretic*.

a.) Curentul de conducţie. Mediile, cum ar fi metalele şi cărbunii, care conţin sarcini libere în stare naturală şi care nu sunt însoţite de transformări chimice când sunt parcurse de curenţi electrici, se numesc **conductoare de speţa I-a**. Circulaţia curentului prin metale este însoţită întotdeauna de degajare de căldură. Trecerea curentului prin electroliţi, pe lângă degajarea de căldură, este însoţită şi de fenomene chimice. Asemenea medii se numesc **conductoare de speţa a-II-a.**

Circulaţia purtătorilor de sarcină prin mediile conductoare formează ***curentul de conducţie***.

b.) Curentul de deplasare apare prin materialele dielectrice când acestea sunt plasate în câmpuri electrice.

c) Curentul de convecție şi curentul Röntgen teoretic apare numai în conductoare parcurse de curenți de conducție şi aflate în mişcare.

Deoarece importanța în practică a curenților de deplasare şi a curenților de convecție şi Röntgen teoretic este redusă, în cele ce urmează se va face referire numai la curentul electric de conducție.

Observație: întotdeauna starea electrocinetică este însoțită de câmp magnetic.

Electronii liberi dintr-un conductor metalic şi/sau ionii unui electrolit sunt în permanență într-o mişcare continuă dezordonată. Cantitatea de electricitate care străbate orice secțiune transversală a conductorului în condiții normale, este în medie, egală cu zero. Dacă însă asupra acestor electroni liberi acționează forțe într-un anumit sens (de exemplu forțele unui câmp electric), la viteza lor se adaugă componenta vitezei orientată în sensul forței de acțiune. În acest caz în orice secțiune transversală a conductorului trece o cantitate determinată de electricitate, adică, în conductor ia naştere un curent electric, numit ***curent de conducție***.

Intensitatea curentului. Pentru caracterizarea deplasării dirijate a particulelor de sarcină electrică se utilizează noțiunea de ***intensitatea a curentului***, care este egală cu cantitatea de electricitate care trece printr-o secțiune transversală a conductorului în timp de o secundă.

Dacă într-un interval de timp oarecare, intensitatea curentului nu îşi schimbă valoarea şi nici sensul, curentul se numeşte ***continuu***. În acest caz se poate scrie relația:

$$\mathrm{I} = \frac{q}{t} \tag{1.3}$$

unde q reprezintă cantitatea de electricitate care trece prin secțiunea transversală a conductorului în timpul t. Dacă considerăm un element de suprafață ***ds*** prin care trece cantitatea de electricitate ***dq*** în timpul ***dt***, atunci:

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{1.4}$$

Curentul electric este o mărime scalara.

Densitate de curent. Fie, **ds**, un element de suprafață dintr-o suprafață oarecare, **S**, a unui mediu conductor, prin care circulă un curent electric. Se poate presupune ca direcția curentului, adică direcția mişcării sarcinilor electrice este aceeaşi în toate punctele elementului. Raportul dintre curentul elementar ***di***, ce trece prin elementul de suprafață ***ds***

(perpendicular pe direcția curentului) şi aria acestui element se numeşte densitate de curent, *J,* şi se exprimă cu relația:

$$J = \frac{di}{ds} \tag{1.5}$$

Densitatea de curent este o mărime vectorială a cărei direcție coincide cu direcția de mişcare a sarcinilor electrice pozitive în punctul respectiv.

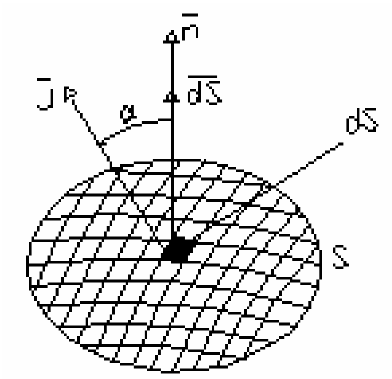


Fig. 1.1

Dacă vectorul $\overline{J}$ şi normala pozitivă la suprafață formează unghiul α, atunci:

$$J = \frac{di}{ds \cdot \cos\alpha} \text{ sau,}$$

$$di = J \cdot ds \cdot \cos\alpha = \overline{J} \cdot \overline{ds}$$

Integrând, vom obține valoarea curentului ce trece prin întreaga suprafață S, adică:

$$i = \int_S \overline{J} \cdot \overline{ds} \tag{1.6}$$

Dacă densitatea de curent are aceeaşi valoare în toate punctele suprafeței şi formează cu normala la suprafață pretutindeni acelaşi unghi, se poate scrie:

$$i = J \cdot \cos\alpha \int_S ds = J \cdot S \cdot \cos\alpha$$

Dacă unghiul $\alpha = 0$, adică direcția curentului este perpendiculară pe suprafață, vom avea:

$$i = J \cdot S \tag{1.7}$$

Relația (1.7) este valabilă pentru un curent constant în timp şi în cazul conductoarelor liniare, care au dimensiunile transversale mici în raport cu lungimea lor.

În sistemul internațional, unitatea de măsură pentru intensitatea curentului electric este amperul, iar pentru densitatea de curent amperul/mp (A/m^2).

1.3. Legea conducției electrice (Legea lui Ohm)

1.3.1. Legea lui Ohm în formă locală

Considerând o porțiune de circuit electric străbătută de un curent electric, se poate demonstra că densitatea de curent prin conductor este direct proporțională cu intensitatea câmpului electric rezultant $\overline{E} + \overline{E_i}$ adică :

$$\overline{J} = \gamma \cdot \left(\overline{E} + \overline{E_i}\right) \qquad (1.8)$$

în care: γ - conductibilitatea electrică a materialului.

$\overline{E}$ - intensitatea câmpului electric

$\overline{E_i}$ - intensitatea câmpului electric imprimat.

Relația (1.8) exprimă ***legea lui Ohm în forma locală.***

Conductibilitatea electrică depinde de natura, structura şi temperatura materialului conductor. Unitatea de măsură pentru conductibilitate este $(\Omega m)^{-1}$.

1.3.2. Legea lui Ohm în formă integrală

Această lege se referă la conductori în formă de fir (filiformi), conductori la care dimensiunile secțiunii sunt mult mai mici ca lungimea. Pentru conductoare avem $\overline{E_i}$ =0.

Considerând că direcția câmpului coincide cu direcția deplasării sarcinilor electrice, pentru un mediu izotrop, putem scrie:

$$U = \int_l \overline{E} \cdot \overline{dl} = \int_l E \cdot dl = \int_l \frac{J}{\gamma} dl$$

Însă: $J = \dfrac{dI}{ds}$ şi deci $U = \displaystyle\int_l \frac{dI}{\gamma \cdot ds} dl$

Curentul elementar *dI*, care trece prin secțiunea transversală *ds*, poate fi considerat constant, deci se poate scoate de sub semnul de integrare întrucât conform principiului continuității curentului, acest factor este identic în orice secțiune transversală de-a lungul drumului de integrare, de lungime *l.* Deci avem:

$$U = dI \int_l \frac{dl}{\gamma \cdot ds} \qquad (1.9)$$

Diferența de potențial U între capetele conductorului considerat este aceeaşi pentru toți curenții elementari *dI* şi calculând curentul I în tot conductorul prin însumarea curenților *dI* în diferite elemente de suprafață *ds*, ajungem la concluzia că intensitatea curentului este proporțională cu tensiunea U, adică:

$$U = R\,I \qquad (1.10)$$

unde R, se numeşte rezistență electrică a porțiunii de conductor considerată şi se calculează cu relația (1.11).

$$R=\int_{l}\frac{dl}{\gamma\times ds} \qquad (1.11)$$

Rezistența electrică se măsoară în Ohmi (Ω). Mărimea inversă rezistenței se numeşte conductanță electrică şi se notează cu G: G=1/R. Unitatea de măsură pentru conductanță este Ω^{-1} (siemens).

Relația (1.10), exprimă ***legea lui Ohm cu aplicare la o porțiune de conductor***. Dacă considerăm cazul cel mai simplu, al unui conductor liniar de secțiune constantă ds, pe toată lungimea *l*, se poate scrie relația sub forma:

$$U=\frac{dI}{ds}\int_{l}\frac{dl}{\gamma}$$

Dacă conductorul este omogen şi γ este constant atunci avem:

$$U=\frac{dI}{\gamma\cdot ds}\int_{l}dl=\frac{dI}{ds}\frac{l}{\gamma} \quad \text{sau} \quad \int_{o}^{I}dI=\frac{U\gamma}{l}\int_{S}ds=\frac{U\gamma}{l}\cdot S \quad \text{deci:}$$

$$I=\frac{U}{\dfrac{l}{\gamma\cdot S}}=\frac{U}{R}$$

Prin urmare, expresia rezistenței electrice are forma:

$$R=\frac{l}{\gamma\cdot S} \quad \text{sau} \quad R=\rho\frac{l}{S} \qquad (1.12)$$

unde $\rho=\dfrac{1}{\gamma}$ reprezintă rezistență specifică sau rezistivitate şi reprezintă rezistența unui conductor cu lungimea de 1m .Unitatea de măsură pentru rezistivitate este $\Omega\cdot mm^2/m$.

În cazul conductoarelor masive, de exemplu în cazul solului se utilizează unitatea Ω·cm sau, în cazul izolanților, Ω·m.

Să examinăm acum un circuit electric închis, care conține o sursă de t.e.m. „**e**”. Sub acțiunea t.e.m în circuit apare curentul I. Câmpul electric total în acest caz este: $E=E_s+E_i$, unde E_s este câmpul de natură electrostatică şi E_i este câmpul electric imprimat.

Scriind integrala de linie a intensității câmpului de la borna negativă B, de-a lungul drumului ***n*** în interiorul sursei (fig.1.2), spre borna pozitivă A, obținem:

$$\int_{BnA}\overline{E}.\overline{dl}=\int_{BnA}\overline{E_s}.\overline{dl}+\int_{BnA}\overline{E_i}.\overline{dl} \qquad (1.13)$$

Ultima integrala reprezintă t.e.m. a sursei. Integrala $\int\limits_{BnA} \overline{E}.\overline{dl}$ nu depinde de alegerea drumului de integrare şi prin urmare:

$$\int\limits_{BnA} \overline{E_s}.\overline{dl} = \int\limits_{BmA} \overline{E_s}.\overline{dl} = -\int\limits_{AmB} \overline{E_s}.\overline{dl} = -(V_A - V_B)$$

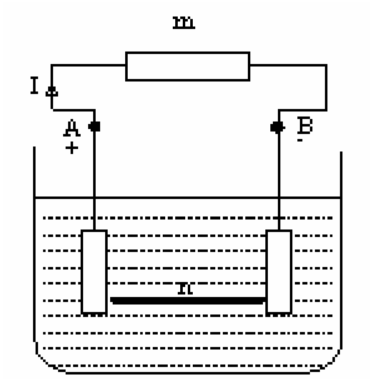


Fig 1.2

Egalitatea (1.13) se poate scrie deci sub forma: $\int\limits_{BnA} \overline{E}.\overline{dl} = -\int\limits_{AmB} \overline{E_s}.\overline{dl} + e$ sau $e = \int\limits_{AmB} \overline{E_s}.\overline{dl} + \int\limits_{BnA} \overline{E}.\overline{dl}$.

Prima integrală reprezintă diferenţa de potenţial la bornele sursei, respectiv tensiunea la borne, care este egală, conform legii lui Ohm cu produsul între intensitatea curentului şi rezistenţa circuitului exterior. A doua integrală reprezintă căderea de tensiune pe circuitul electric interior al sursei, pe care îl notăm cu u_o. Deci:

$$e = U + u_o = RI + u_o \qquad (1.14)$$

Căderea de tensiune u_o este datorată rezistenţei interioare ***r*** a sursei şi se poate scrie, conform legii lui Ohm aplicată unei porţiuni de circuit: $u_0 = r \cdot I$.

Relaţia (1.14) se mai poate scrie şi sub forma:

$$e = RI + rI \text{ sau } I = \frac{e}{R + r} \qquad (1.15)$$

Relaţiile (1.15) reprezintă ***legea lui Ohm în formă integrală sau legea lui Ohm aplicată unui circuit întreg***. În cazul când în circuitul închis acţionează mai multe surse de t.e.m. diferite, prin „**e**" trebuie să se înţeleagă suma algebrică a t.e.m. ale tuturor surselor. Legea lui Ohm este o lege ce depinde de proprietăţile materialului şi poartă denumirea de lege de material.

1.3.3. Dipol electric.

O porţiune de circuit cu 2 borne, între care se află o tensiune electrică, se numeşte *dipol electric*. Dacă dipolul conţine surse este *activ,* iar dacă nu conţine este *pasiv*. Relaţia (1.8) integrată pe conturul închis j - r_{jk} - e_{jk} - k - U_{jk} - j ale unui dipol (fig.1.3) ne dă :

$$V_j - V_k + e_{jk} = r_{jk} I_{jk} \qquad (1.16)$$

Relația (1.16) mai poate fi scrisă şi sub formele: $U_{jk} + e_{jk} = r_{jk}I_{jk}$ sau

$$I_{jk} = g_{jk}\,(U_{jk} + e_{jk}) \qquad (1.17)$$

Relația (1.17) reprezintă o ***formă generală a legii lui Ohm*** pentru un dipol activ fig.1.3 (a), dacă I_{jk}, U_{jk} şi e_{jk} au acelaşi sens.

Pentru dipolul pasiv fig.1.3 (b), avem relația:

$$U_{jk} = r_{jk}I_{jk} \qquad (1.18)$$

Dacă una din mărimi are sens opus, se va lua în relație cu semnul minus. Astfel pentru fig.1.4a şi 1.4b, avem relațiile:

$$I_{jk} = g_{jk}\,(-U_{jk} + e_{jk}) \qquad (1.19)$$

$$r_{jk}I_{jk} =- U_{jk} \qquad (1.20)$$

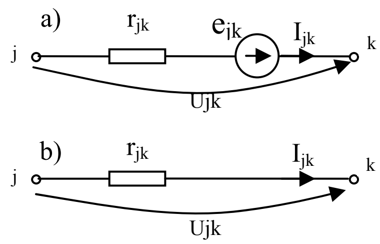


Fig 1.3

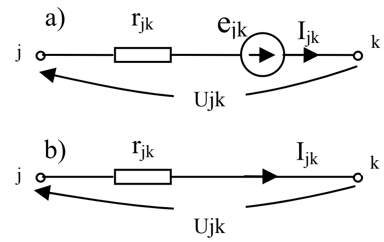


Fig 1.4

1.4. Legea transformării energiei în conductoare (Legea Joule – Lenz)

Să considerăm un conductor prin care trece un curent electric de intensitate i şi fie dq, cantitatea de electricitate ce traversează secțiunea în intervalul de timp dt. Lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului electric într-o porțiune oarecare a conductorului, pentru menținerea curentului în circuit la capetele căruia există o diferență de potențial U, va fi:

$$dL = U \cdot dq \qquad (1.21)$$

Acest lucru mecanic consumat se transformă în căldură şi conductorul se va încălzi. Puterea necesară pentru menținerea curentului în conductor este:

$$P = \frac{dL}{dt} = U\frac{dq}{dt} = UI \qquad (1.22)$$

Înlocuind tensiunea U, din relația lui Ohm se obține relația:

$$P = RI^2 \qquad (1.23)$$

Puterea se măsoară în wați ($1W = 1V \cdot 1A$).

Cantitatea de energie electrică care se va transforma în căldură va fi:

$$W = Q = RI^2t \tag{1.24}$$

Această relație a fost determinată experimental în anul 1844 de savantul rus Lenz şi de savantul englez Joule, fapt pentru care poartă denumirea de ***legea Joule – Lenz.***

Fenomenul de transformare a energiei electrice în căldură pe baza efectului termic al curentului electric, este utilizat atât în industrie cât şi în funcționarea aparatele de uz casnic. Există şi unele situații când acest fenomen este şi dăunător. În industrie se construiesc cuptoare electrice, ciocane de lipit electrice, instrumente de măsură termice şi alte aparate ce au la bază acest fenomen. Printre aparatele de uz casnic, a căror funcționare se bazează pe efectul termic, distingem: sobe electrice, aragazuri electrice, ceainice electrice, perne electrice, fierul electric de călcat, radiatoare electrice etc.

Efectul dăunător al transformării energiei electrice în căldură este întâlnit, îndeosebi, la transformatoare şi maşinile electrice. Încălzirea conductoarelor electrice şi a miezurilor feromagnetice conduc la reducerea randamentului şi deteriorarea izolației. Evitarea acestor efecte se poate face folosind relee termice şi alte dispozitive electrice şi electronice ce întrerup alimentarea cu energie electrică a circuitelor, atunci când curentul depăşeşte valoarea maximă admisă.

1.5. Teoremele lui Kirchhoff

1.5.1. Rețea electrică

Un ansamblu format din surse şi receptori legați prin conductori, formează o rețea electrică. Dacă sursele au tensiunile electromotoare constante în timp, rețeaua se va afla în regim staționar. O rețea electrică poate fi caracterizată atât din punct de vedere topologic cât şi electric.

Din punct de vedere topologic o rețea se caracterizează prin:

Laturi - porțiuni din rețea, compuse în general din receptori şi surse, cuprinse între două noduri pe aceeaşi cale de curent.

Noduri - puncte de ramificație electrică, unde se întâlnesc cel puțin trei laturi sau căi de curent.

Ochiuri - contururi închise în care o latură a rețelei intră o singură dată.

Din punct de vedere electric rețeaua se caracterizează prin:

- Curenții din laturi
- T.e.m ale surselor

- Rezistențele laturilor în care se includ de obicei şi rezistențele interioare ale surselor.

1.5.2. Teorema I-a a lui Kirchhoff

Această teoremă se referă la nodurile rețelei. Teorema I-a a lui Kirchhoff se enunță astfel: suma algebrică a curenților ce converg (intră sau ies) într-un nod este egală cu zero. Forma generală a relației poate fi:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k \times \mathrm{sgn}(i_k) = 0 \qquad (1.25)$$

unde: i_1, i_2, i_3, ……., i_n sunt curenții care converg în nodul k, iar ***sgn(*i_k*)*** reprezintă semnul curentului i_k, care se ia convențional cu plus dacă iese din nod şi cu minus dacă intră. Pentru nodul din fig.1.5 se poate scrie:

$$-i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

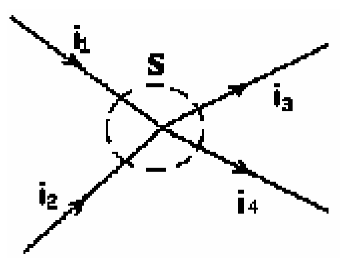


Fig.1.5

Pentru demonstrarea acestei legi, se consideră nodul din fig.1.5 situat în interiorul suprafeței închise S. Prin aplicarea principiului continuității scurgerii sarcinilor electrice, suma sarcinilor care intră în interiorul suprafeței S este egală cu suma sarcinilor care ies din suprafața respectivă:

$$q_1+q_2=q_3+q_4 \qquad (1.26)$$

Împărțind relația prin t se obține:

$$i_1+i_2=i_3+i_4 \qquad (1.27)$$

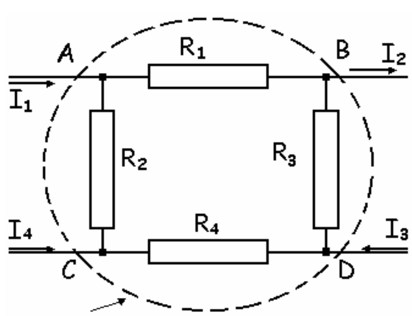


Fig.1.6

Adică suma curenților care intră în nod este egală cu suma curenților care ies din acel nod. Dacă această teoremă se aplică rețelei din fig.1.6, între curenții I_1, I_2, I_3 si I_4 se poate scrie relația (rezistoarele R_1,R_2,R_3 şi R_4 sunt considerate în interiorul suprafeței închise S):

$$I_1+I_3+I_4=I_2$$

1.5.3. Teorema a II-a a lui Kirchhoff

Această teoremă se aplică circuitelor închise (ochiurilor de rețea). Ea se enunță astfel: într-un circuit închis, suma algebrică a căderilor de tensiune pe rezistoarele laturilor este egală cu suma algebrică a t.e.m.. Căderile de tensiune se iau cu semnul plus dacă sensul curentului prin rezistor coincide cu sensul de parcurgere a conturului şi cu minus în caz contrar. Se atribuie semnul plus t.e.m., când sensul de parcurgere a conturului străbate sursa, prin interior, de la borna negativă spre borna pozitivă şi semnul minus în caz contrar. Pentru exemplificare se consideră circuitul simplu din fig.1.7, ce aparţine unei reţele electrice oarecare. În acest circuit acţionează mai multe surse de t.e.m. Aplicând integrala de linie a vectorului intensităţii câmpului electric de-a lungul întregului circuit închis abcdfa, avem :

$$\oint_{abcdfa} \overline{E}\cdot\overline{dl} = \oint_{abcdfa} (\overline{E}_S + \overline{E}_{impr.})\cdot\overline{dl} = \oint_{abcdfa} \overline{E}_S\cdot\overline{dl} + \oint_{abcdfa} \overline{E}_{impr.}\cdot\overline{dl}$$

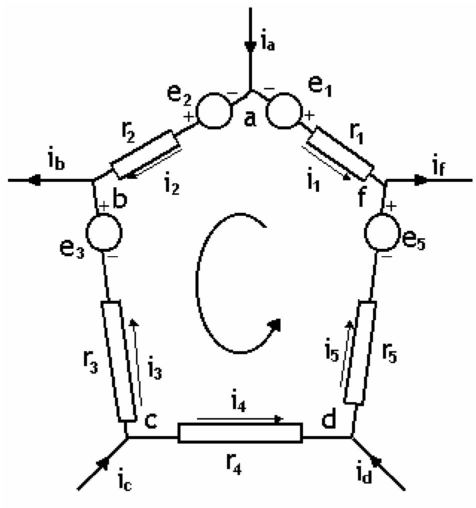


Fig.1.7

Întrucât

$$\oint_{abcdfa} \overline{E}_S\cdot\overline{dl} = 0 \text{, rezultă:}$$

$$\oint_{abcdfa} \overline{E}\cdot\overline{dl} = \oint_{abcdfa} \overline{E}_{impr}\cdot\overline{dl}$$

Partea stângă a egalităţii reprezintă suma căderilor de tensiune în toate porţiunile circuitului închis considerat:

$$\oint_{abcdfa} \overline{E}\cdot\overline{dl} = = \sum_{k=1}^{n} r_k i_k$$

unde n reprezintă numărul de laturi ale circuitului considerat.

Partea dreaptă a egalităţii reprezintă suma algebrică a t.e.m. ale tuturor surselor care acţionează în acest circuit, adică:

$$\oint_{abcdfa} \overline{E}_{impr.}\cdot\overline{dl} = \sum_{k=1}^{n} e_k$$

Astfel avem:

$$\sum_{k=1}^{n} r_k i_k = \sum_{k=1}^{n} e_k \qquad (1.28)$$

În cazul circuitului reprezentat în fig. 1.7, teorema a II-a a lui Kirchhoff se scrie astfel:

$$-r_1 i_1 + r_2 i_2 - r_3 i_3 + r_4 i_4 + r_5 i_5 = -e_1 + e_2 - e_3 + e_5$$

1.6. Gruparea rezistoarelor. Rezistențe echivalente.

Rezistoarele se pot grupa în serie, paralel şi mixt.

a.) Gruparea în serie. Se spune că elementele unui circuit electric sunt legate în serie, dacă toate aceste elemente sunt străbătute de acelaşi curent. Fie circuitul din fig.1.8, format din trei rezistoare legate în serie. Aceste rezistoare pot fi aşezate ca în fig. 1.8a, 1.8b sau 1.8c. Rezistența echivalentă a grupării este egală cu suma rezistențelor tuturor rezistoarelor din care este compusă gruparea, adică: $R = r_1 + r_2 + r_3$

În cazul general, când avem n rezistoare legate în serie, relația se scrie sub forma:

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r_k} \tag{1.29}$$

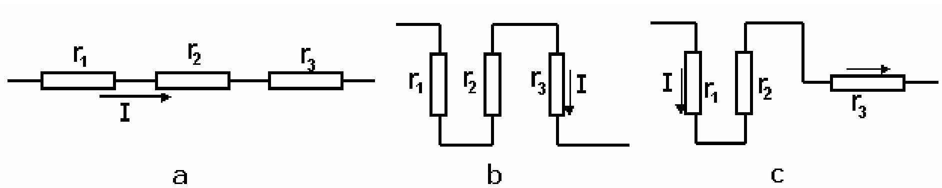


Fig.1.8

Dacă, $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots\ldots = r_n = r$ rezultă $R = n \cdot r$

b.) Gruparea în paralel. Un grup de rezistențe sunt conectate în paralel dacă tensiunea aplicată la bornele fiecărui rezistor este aceeaşi cu tensiunea aplicată întregii grupări (fig.1.9). Rezistoarele pot fi aşezate ca în fig. 1.9 a, b, sau c. Rezistența echivalentă a grupării este dată de

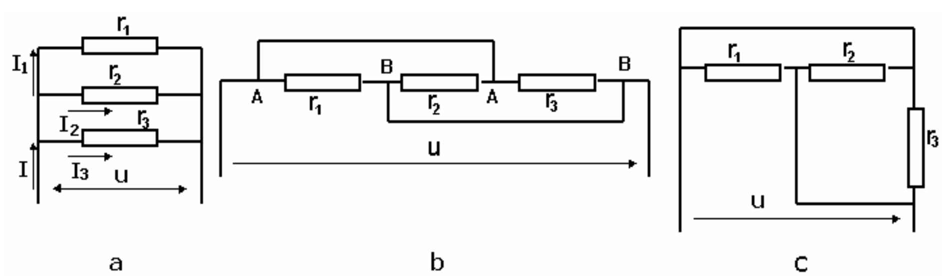


Fig.1.9

relația: $$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}.$$

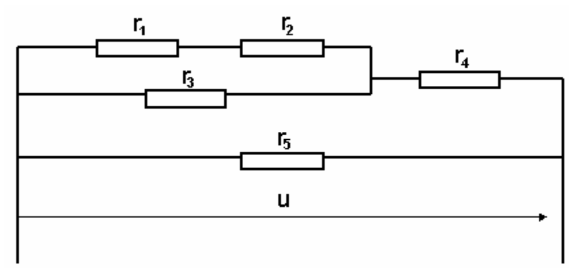
Relația, sub formă generală, se scrie astfel:

$$\frac{1}{\mathbf{R}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathbf{r_k}} \qquad \text{sau} \qquad \mathbf{G} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{G_k} \qquad (1.30)$$

adică conductanța echivalentă, la o grupare în paralel, este egală cu suma conductanțelor parțiale.

Gruparea mixtă se caracterizează prin aceea că are rezistoare legate şi în serie şi în paralel.

În fig.1.10 este reprezentată o grupare mixtă în care, r_1 şi r_2 sunt în serie, rezistența echivalentă r_{12} este în paralel cu r_3 şi r_{123} este în serie cu r_4. Rezistența echivalentă dintre r_{123} şi r_4 este în paralel cu r_5. Rezistența echivalentă a întregii grupări, va fi :



$$\mathbf{R} = \frac{r_5\left[r_4 + \dfrac{r_3(r_1 + r_2)}{r_1 + r_2 + r_3}\right]}{r_5 + r_4 + \dfrac{r_3(r_1 + r_2)}{r_1 + r_2 + r_3}}$$

Fig. 1.10

În fig. 1.11 este dată o grupare mixtă compusă din 11 rezistoare. Rezistența echivalentă între bornele A si B se deduce astfel: rezistoarele 6, 7 şi 8 sunt legate în serie; rezistența lor echivalentă este legată în paralel cu R_2; rezistoarele 9, 10 si 11 sunt legate în serie şi rezistența lor echivalentă în paralel cu R_4. Se reduce astfel gruparea la o legare în serie.

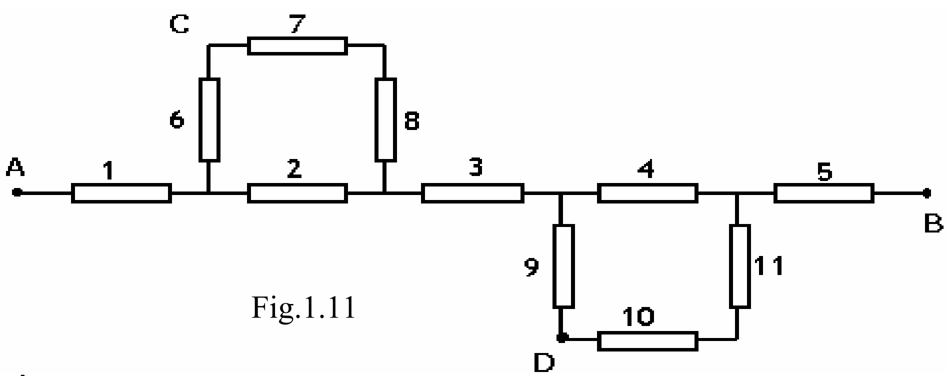


Fig.1.11

Între bornele C si D, rezistenta echivalentă este formată din rezistoarele 7 şi 8 legate în serie, 6 si 2 legate tot în serie (R_1 nu intervine), 4, 10, 11 legate tot în serie (R_5 nu intervine). R_{78} este în paralel cu R_{26} şi R_9 în paralel cu $R_{4,10,11}$ şi deci gruparea se reduce la o legare în serie.

1.7. Divizorul de curent şi divizorul de tensiune

În fig.1.12 este reprezentat un ***divizor de curent*** de ordinul doi, adică curentul total I se divide (se ramifică) în doi curenţi, I_1 si I_2. Aceşti curenţi se pot exprima numai în funcţie de I, R_1 şi R_2. Folosind legea lui Ohm se obţin relaţiile:

$$I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ şi } I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (1.31)$$

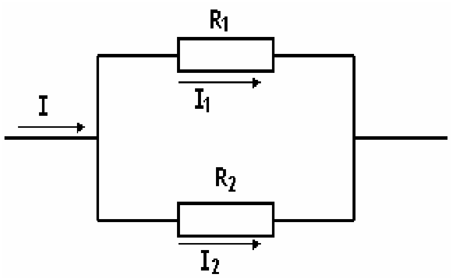


Fig. 1.12

Rezistorul de rezistenţă variabilă (reostat cu cursor) reprezentat în fig.1.13 se comportă ca un ***divizor de tensiune*** dacă se aplică la bornele lui tensiunea U, iar între cursor şi o bornă a rezistorului se culege o tensiune *u*, dată de relaţia:

$$u = r\frac{U}{R} \quad (1.32)$$

Raportul r/R fiind subunitar tensiunea u va fi întotdeauna mai mică decât tensiunea U.

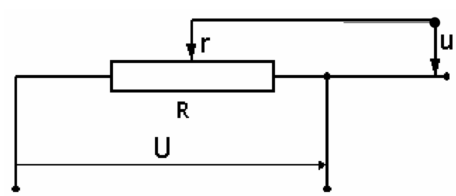


Fig. 1.13

1.8. Rezolvarea circuitelor complexe de curent continuu

La rezolvarea unui circuit electric, de obicei, se cunosc valorile tensiunilor electromotoare şi ale rezistenţelor din circuit şi se cer curenţii prin laturile circuitului. Circuitele electrice care conţin numai grupări de rezistoare serie şi paralel şi nu conţin mai multe surse pe laturi diferite se consideră circuite simple, restul de circuite se numesc circuite complexe.

1.8.1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff.

Fie circuitul din fig.1.14. Circuitul are trei noduri (n=3) şi 5 laturi (*l*=5). Aplicând teorema I-a a lui Kirchhoff în noduri vom avea:

(1) $i_5 = i_1 + i_6$
(2) $i_4 + i_6 = i_2$
(3) $i_1 + i_2 = i_4 + i_5$

Se observă că dacă adunăm primele două relații, obținem relația a treia şi deci, numai două relații sunt independente.

Pentru o rețea complexă cu n noduri, numai n-1 relații ale teoremei I-a a lui Kirchhoff sunt independente şi utile.

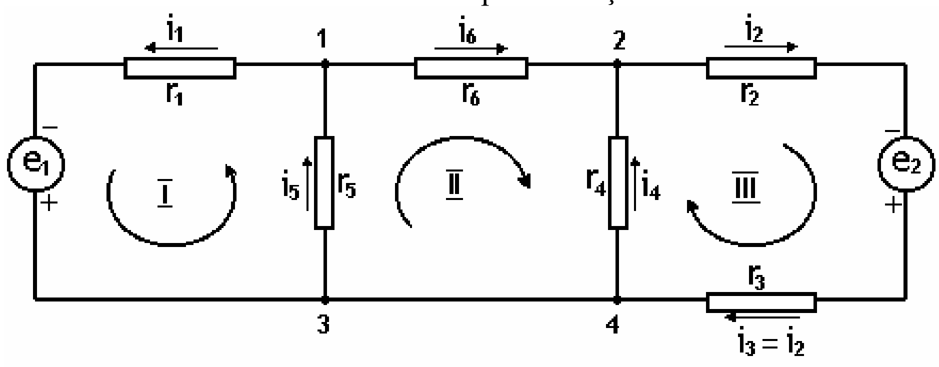


Fig.1.14

Teorema a II-a a lui Kirchhoff se aplică circuitelor închise (ochiuri). Dintre toate numai *o=l-(n-1)* sunt circuite independente (ochiuri independente), care în cazul nostru sunt în număr de 3 (*o*=3). Dacă se notează cu ***l*** numărul de laturi ale circuitului complex (care este egal şi cu numărul necunoscutelor), cu ***o*** numărul de ochiuri independente şi cu ***n*** numărul de noduri, atunci teorema a II-a a lui Kirchhoff se aplică pe *o=l-(n-1)* circuite închise. În cazul din fig.1.14, *o*=5-3+1=3. Aplicând teorema a II-a a lui Kirchhoff pentru cele trei ochiuri, vom avea:

$$r_1 i_1 + r_5 i_5 = e_1$$
$$r_5 i_5 + r_6 i_6 - r_4 i_4 = 0$$
$$r_3 i_3 + r_4 i_4 + r_2 i_2 = (r_2 + r_3) i_2 + r_4 i_4 = e_2$$

Teorema a doua a lui Kirchhoff se poate aplica oricărui circuit închis. Rezolvând sistemul format din primele două ecuații, obținute prin aplicarea teoremei I-a a lui Kirchhoff şi cele trei ecuații rezultate prin aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff, obținem curenții necunoscuți $i_1, i_2, \ldots, i_5$. Numărul necunoscutelor unui circuit complex trebuie să fie întotdeauna egal cu numărul laturilor.

1.8.2. Metoda transfiguraţiei.

Se aplică circuitelor complexe ce conţin grupări stea şi triunghi. Metoda constă în a înlocui grupări de rezistoare conectate în triunghi, cu altele echivalente conectate în stea, sau invers. Metoda se aplică numai în cazul în care transfigurarea conduce la o rezolvare mai simplă a reţelei şi nu alterează rezultatele (curenţii din circuit rămân neschimbaţi). Fie r_{12},r_{23} şi r_{31} rezistenţele rezistoarelor legate în triunghi, pe care vrem să le înlocuim cu rezistenţele echivalente r_1,r_2, şi r_3 a rezistoarelor legate în stea (fig.1.15) sau invers. De exemplu, în circuitul din fig.1.14, prin

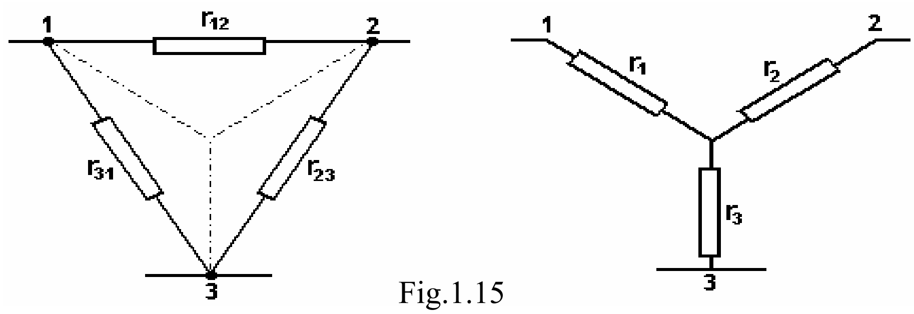


Fig.1.15

înlocuirea triunghiului 1-2-3 cu o stea echivalentă, sistemul de ecuaţii obţinut cu teoremele lui Kirchhoff are trei ecuaţii cu trei necunoscute.

Pentru a nu se modifica curenţii din circuit este necesar ca rezistenţele între două puncte din reţea, când se întrerupe legătura spre al treilea nod, să fie aceleaşi în cele două scheme. Adică, dacă se aplică o tensiune între nodurile 1-2 la conexiunea în triunghi şi aceeaşi tensiune între nodurile 1-2 la conexiunea în stea, curenţii în restul circuitului vor rămâne neschimbaţi. Vom putea deci scrie, în cazul acesta egalitatea rezistenţelor echivalente dintre cele două noduri şi anume:

$$r_1 + r_2 = \frac{r_{12}(r_{23} + r_{31})}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}$$

Folosind acelaşi raţionament şi pentru nodurile 2-3 şi respectiv 3-1, când se întrerup legăturile în nodurile 1 şi 2, se mai obţin încă două relaţii, care mai pot fi obţinute şi prin permutarea circulară a indicilor. Astfel avem:

$$r_2 + r_3 = \frac{r_{23}(r_{31} + r_{12})}{r_{12} + r_{23} + r_{31}} \qquad \text{şi} \qquad r_3 + r_1 = \frac{r_{31}(r_{12} + r_{23})}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}$$

Pentru a găsi valorile lui r_1, r_2, r_3 în funcţie de r_{12}, r_{23} şi r_{31}, se adună cele trei relaţii şi obţine relaţia:

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{r_{12}r_{23} + r_{12}r_{31} + r_{23}r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}} \qquad (1.33)$$

apoi, se scad pe rând cele trei relații din relația (1.33). Se obțin expresiile:

$$r_1 = \frac{r_{12}r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}$$

$$r_2 = \frac{r_{23}r_{12}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}} \text{ şi } r_3 = \frac{r_{31}r_{23}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}} \qquad (1.34)$$

Pentru aflarea rezistențele r_{12}, r_{23} şi r_{31} în funcție de r_1, r_2 şi r_3, se procedează astfel:

se calculează relația $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{r_{12}r_{23}r_{31}(r_{12} + r_{23} + r_{31})}{(r_{12} + r_{23} + r_{31})^2}$, apoi se împarte pe rând la relațiile (1.34) şi se obțin relațiile (1.35).

$$r_{23} = r_2 + r_3 + \frac{r_2r_3}{r_1} \qquad r_{31} = r_3 + r_1 + \frac{r_3r_1}{r_2}$$

$$r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1r_2}{r_3} \qquad (1.35)$$

Aplicând această metodă, la circuitul reprezentat în fig.1.14, triunghiul 1-2-3 se transformă într-o stea echivalentă şi obținem circuitul din fig.1.16.

Rezistențele conectate în stea sunt date de relațiile:

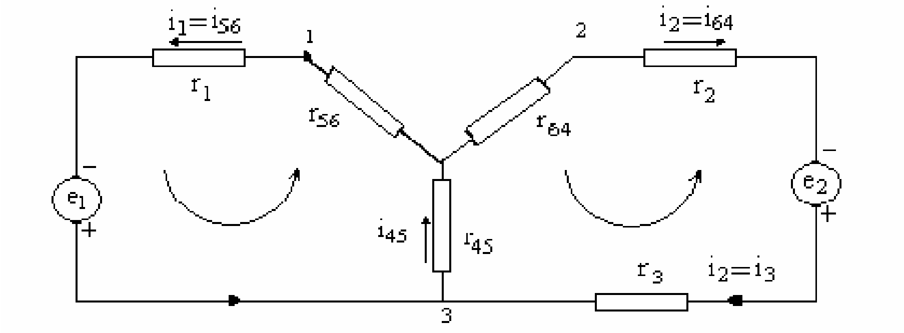


Fig. 1. 16

$$r_{56} = \frac{r_5 r_6}{r_4 + r_5 + r_6}; \; r_{64} = \frac{r_4 r_6}{r_4 + r_5 + r_6}; \; r_{54} = \frac{r_4 r_5}{r_4 + r_5 + r_6}$$

Rezolvarea circuitului se face utilizând teoremele lui Kirchhoff. Sistemul ce trebuie rezolvat este format din ecuațiile:

$$i_{45} = i_1 + i_2$$
$$i_{45}r_{54} + (r_1 + r_{56})i_1 = e_1$$
$$i_{45}r_{54} + (r_2 + r_3 + r_{64})i_2 = e_2$$

Din acest sistem calculăm numai curenții i_1 şi i_2. Aplicăm apoi teorema a II-a a lui Kirchhoff ochiului I din circuitul reprezentat în fig.1.14 şi vom afla curentul i_5. Teorema I-a a lui Kirchhoff aplicată nodului 1, ne va da curentul i_6 şi aplicată apoi în nodul 2 ne va da curentul i_4.

1.8.3. Metoda suprapunerii efectelor.

Are la bază următorul principiu: dacă în aceeaşi rețea se suprapun două sau mai multe regimuri de echilibru, se obține tot un regim de echilibru. Conform acestui principiu, curentul într-o latură a unui circuit poate fi considerat ca sumă algebrică a curenților produşi în acea ramură de fiecare t.e.m. în parte, când ar lucra în circuit independent de celelalte tensiuni electromotoare.

Acest principiu al suprapunerii efectelor permite, deci, ca un circuit complex să fie descompus în mai multe circuite simple în care să nu acționeze surse decât pe o singură latura, pe celelalte laturi sursele se înlocuiesc cu rezistențele lor interioare, iar în cazul când acestea nu sunt specificate (fiind înglobate în rezistențele laturilor), sursele se scurtcircuitează.

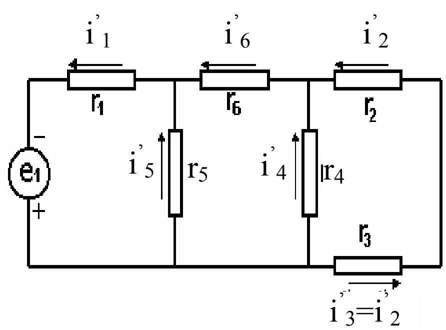


Fig.1.17

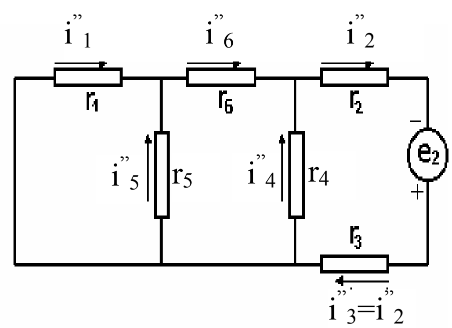


Fig.1.18

Aplicând principiul suprapunerii efectelor circuitului reprezentat în fig.1.14, obținem două circuite mai simple de rezolvat, reprezentate în fig.1.17 şi 1.18.

Curenții din cele două circuite se pot calcula, cu uşurință, cu ajutorul relațiilor de mai jos:

$$i_1' = \frac{e_1}{r_1 + \dfrac{r_5\left[r_6 + \dfrac{r_4(r_2+r_3)}{r_2+r_3+r_4}\right]}{r_5 + r_6 + \dfrac{r_4(r_2+r_3)}{r_2+r_3+r_4}}}; \qquad i_1'' = \frac{e_2}{r_2 + r_3 + \dfrac{r_4\left(r_6 + \dfrac{r_1 r_5}{r_1+r_5}\right)}{r_4 + r_6 + \dfrac{r_1 r_5}{r_1+r_5}}};$$

$$i_5' = i_1' \frac{r_6 + \dfrac{r_4(r_2+r_3)}{r_2+r_3+r_4}}{r_5 + r_6 + \dfrac{r_4(r_2+r_3)}{r_2+r_3+r_4}}; \qquad i_4'' = i_2'' \frac{r_6 + \dfrac{r_1 r_5}{r_1+r_5}}{r_4 + r_6 + \dfrac{r_1 r_5}{r_1+r_5}};$$

$$i_6' = i_1' - i_5'; \qquad i_6'' = i_2'' - i_4'';$$

$$i_4' = i_6' \frac{r_2+r_3}{r_2+r_3+r_4}; \quad i_2' = i_6' - i_4'; \qquad i_5'' = i_6'' \frac{r_1}{r_1+r_5}; \quad i_1'' = i_6'' - i_5''$$

Curenții reali, în laturi, în cazul când funcționează ambele surse de t.e.m. e_1 şi e_2, ținând seama de sensul curenților din fig.1.14, 1.17 şi 1.18, sunt:

$$i_1 = i_1' - i_1''; \; i_2 = i_2'' - i_2'; \; i_4 = i_4' + i_4''; \; i_5 = i_5' + i_5''; \; i_6 = i_6'' - i_6'.$$

Dacă într-un circuit complex există trei t.e.m., aplicând principiul suprapunerii efectelor, vom avea de rezolvat trei circuite simple.

Calculând curenții care circulă prin laturile circuitului, determinați de fiecare sursă în parte şi însumându-i algebric, vom obține curenții reali din fiecare latură .

După cum se vede, această metodă de rezolvare a circuitelor complexe de curent continuu este simplă însă laborioasă.

1.8.4. Metoda circuitelor independente (metoda curenților de ochiuri sau de contur)

Această metodă se recomandă rezolvărilor de circuite complexe ce au numărul de ochiuri independente mai mic sau egal cu numărul de noduri minus unul (***o*** **≤n-1**).Sistemul de ecuații format în acest caz are dimensiunea ***o***. Circuitul complex se consideră ca o suprapunere de circuite simple, separate. Se consideră că fiecare din aceste circuite este străbătut de un curent propriu (curent circular sau de contur), care circulă numai prin laturile circuitului. Numărul de circuite simple în care se poate descompune circuitul complex, este egal cu numărul de ecuații independente date de teorema a II-a a lui Kirchhoff, adică este egal cu ***o***. Prin laturile comune a doua circuite simple alăturate, circulă cei doi curenți de contur ai celor două circuite. Prin laturile ne comune circulă numai curentul propriu al conturului. Curenții reali din laturile circuitului complex sunt dați: - fie de curenții proprii în cazul laturilor ne comune; - fie de suma algebrică a curenților circulari ce trec prin laturile respective, în cazul laturilor comune.

Dacă se notează cu I curenții circulari şi cu ***i*** curenții reali şi se aplică teorema a II-a a lui Kirchhoff circuitelor simple (sensurile de parcurgere a contururilor poate orar sau arbitrar) şi ținând cont de suprapunerea efectelor, se obține sistemul de ecuații de formă generală:

$$\begin{array}{l} R_{11}I_1+R_{12}I_2+R_{13}I_3+\ldots+R_{1o}I_o=E_{11} \\ R_{21}I_1+R_{22}I_2+R_{23}I_3+\ldots+R_{2o}I_o=E_{22} \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{o1}I_1+R_{o2}I_2+R_{o3}I_3+\ldots+R_{oo}I_o=E_{oo} \end{array} \qquad (1.36)$$

în care: $R_{ii}=\sum\limits_{k\in i} R_k$, cu $i=\overline{1,o}$, adică reprezintă suma rezistențelor tuturor laturilor circuitului independent ***i,*** iar $R_{ij}=R_{ji}=\sum\limits_{\substack{k\in i\\ k\in j}} R_k$, cu $i,j=\overline{1,o}$, se obține prin însumarea rezistențelor laturilor comune contururilor j şi j. În calculul numeric, termenii $R_{ii}Ii$ sunt totdeauna pozitivi, iar termenii $R_{ij}Ij$ sunt pozitivi atunci când curenții I_i şi I_j trec prin rezistența R_{ij} în acelaşi sens şi negativi în caz contrar. E_{ii} reprezintă suma algebrică a t.e.m. din conturul i, când acesta este parcurs în sensul de parcurgere al curentului de contur.

Cu ajutorul acestei metode se reduce numărul ecuațiilor de rezolvat de la ***l*** (numărul laturilor) la ***o***= *l-n+1* (n – numărul de noduri).

Să aplicăm, spre exemplu, această teoremă pentru rezolvarea circuitului reprezentat în fig.1.14. În acest caz avem: *l*=5; n=2; o=3, deci trei circuite simple (trei ochiuri) străbătute de curenții circulari I_I, I_{II} şi I_{III}. Aplicăm teorema II-a a lui Kirchhoff acestor ochiuri, ținând seama de cele spuse mai sus. Vom avea:

(I) $(r_1+r_5)I_I+r_5I_{II}=e_1$

(II) $(r_4+r_5+r_6)I_{II}+r_5I_I-r_4I_{III}=0$

(III) $(r_2+r_3+r_4)I_{III}-r_4I_{II}=e_2$

Curenții reali, în funcție de curenții circulari, vor fi:

$$i_I=I_I\,;\ i_6=I_{II}\,;\ i_2=I_{III}$$

$$i_5=I_I+I_{II}\,;\ i_4=I_{III}-I_{II}$$

1.8.5. Metoda tensiunilor între noduri

În cazul în care un circuit complex are un număr mic de noduri (este îndeplinită relația n-1 < o), rezolvarea este mult mai rapidă aplicând metoda tensiunilor între noduri.

Vom trata această metodă numai pentru cazul când circuitul complex are numai două noduri. Să considerăm, pentru aceasta, circuitul din fig.1.19.

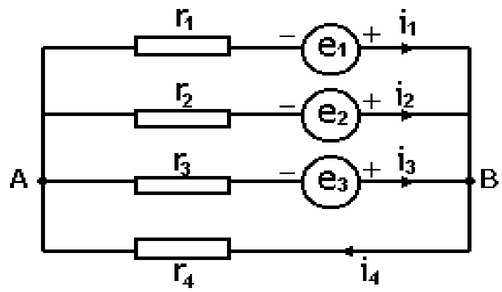


Fig.1.19

Aplicând teorema I-a a lui Kirchhoff - la unul din noduri - găsim relația:

$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0 \tag{1.37}$$

Folosind relațiile (1.19) şi (1.20) şi notând cu $U=U_{BA}$, se obține:

$$i_1 = \frac{e_1 - U}{r_1} = (e_1 - U)G_1; \qquad i_2 = \frac{e_2 - U}{r_2} = (e_2 - U)G_2$$

$$i_3 = \frac{e_3 - U}{r_3} = (e_3 - U)G_3; \qquad i_4 = \frac{U}{r_4} = UG_4$$

Înlocuind aceşti curenți în relația (1.37), găsim:

$$(e_1 - U)G_1 + (e_2 - U)G_2 + (e_3 - U)G_3 - UG_4 = 0$$

sau

$$e_1G_1 + e_2G_2 + e_3G_3 = U(G_1 + G_2 + G_3 + G_4)$$

de unde

$$U = \frac{e_1G_1 + e_2G_2 + e_3G_3}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}$$

În cazul general, relația se scrie sub forma:

$$U = \frac{\sum\limits_{k=1}^{l} e_k G_k}{\sum\limits_{k=1}^{l} G_k} \tag{1.38}$$

unde ***l*** reprezintă numărul de laturi ale circuitului.

Circuitul reprezentat în fig.1.14 poate fi rezolvat şi cu ajutorul metodei tensiunilor între noduri dacă triunghiul compus din rezistoarele r_4, r_5 şi r_6 este înlocuit prin rezistoarele cu rezistenţele echivalente legate în stea r_{45}, r_{56} şi r_{46}. În felul acesta ajungem la un circuit numai cu două noduri (fig.1.20), cu tensiunea între noduri dată de relaţia:

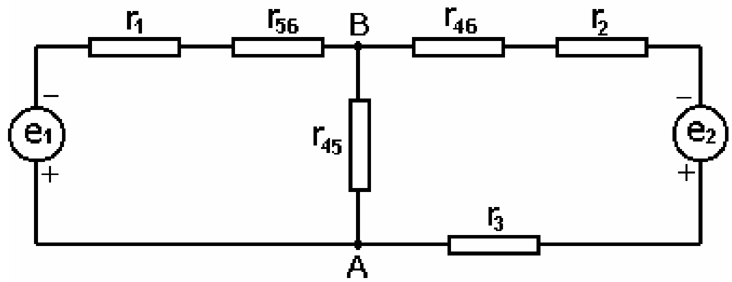


Fig.1.20

$$U_{AB} = \frac{\dfrac{e_1}{r_1 + r_{56}} + \dfrac{e_2}{r_2 + r_3 + r_{46}}}{\dfrac{1}{r_1 + r_{56}} + \dfrac{1}{r_2 + r_3 + r_{46}} + \dfrac{1}{r_{45}}}$$

Calculând valoarea lui U, putem găsi pe i_1 şi i_2 din relaţiile:

$$i_1 = \frac{e_1 - U}{r_1 + r_{56}} \text{ şi } i_2 = \frac{e_2 - U}{r_2 + r_3 + r_{46}}$$

Aplicând teorema a II-a a lui Kirchhoff pe ochiul de reţea reprezentat în fig.1.14 găsim valoarea lui i_5, adică:

$$e_1 = r_1 i_1 + r_5 i_5 \text{ şi deci } i_5 = (e_1 - r_1 i_1)/r_5$$

Cunoscând pe i_1 şi i_5, aplicăm teorema I-a a lui Kirchhoff în nodul 1 şi găsim pe i_6. Aplicând teorema I-a a lui Kirchhoff în nodul 2, găsim pe i_4.

În general, pentru rezolvarea unui circuit trebuie să se aleagă metoda care duce cel mai repede la rezultatul final.

1.8.6. Metoda generatorului echivalent de tensiune (teorema lui Thévenin).

Această metodă se aplică în situaţia când, într-o reţea, ne interesează numai curentul dintr-o singură latură. Procedeul constă în următoarele:

- se înlătură rezistorul din latura respectivă (bornele rămân desfăcute);

- se calculează în aceste condiții tensiunea rețelei U_{ab0} între bornele a şi b (considerată drept cădere de tensiune), unde a şi b sunt bornele la care a fost conectat rezistorul;
- se scot t.e.m. din rețea şi se înlocuiesc cu rezistențele lor interioare (acolo unde rezistențele interioare nu sunt specificate se înlocuiesc cu un conductor);
- se calculează rezistența echivalentă a rețelei (fără rezistorul eliminat) R_{ab0}, văzută dinspre nodurile a şi b;
- cu aceste elemente se construieşte circuitul cu generatorul echivalent care are t.e.m. egală cu U_{ab0}, rezistența interioară R_{ab0} şi ca circuit exterior rezistorul eliminat anterior. Dacă această latură are rezistența R, atunci:

$$I = \frac{U_{ab0}}{R_{ab0} + R} \tag{1.39}$$

Pentru a exemplifica modul de aplicare a teoremei generatorului echivalent, să luăm ca exemplu circuitul reprezentat în fig.1.14 şi să calculăm intensitatea curentului i_6. Pentru aceasta să calculăm rezistența

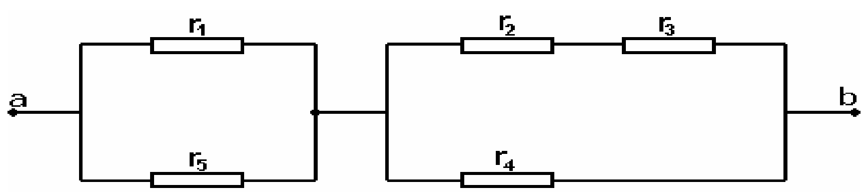


Fig.1.21

R_{ab0}. Schema echivalentă este reprezentată în fig. 1.21. Se deduce uşor că:

$$R_{ab0} = \frac{r_1 r_5}{r_1 + r_5} + \frac{(r_2 + r_3) r_4}{r_2 + r_3 + r_4}$$

Pentru a calcula U_{12}, respectiv U_{ab_0}, când înlăturăm pe r_6, aplicăm circuitului din fig. 1.22 teorema a II-a a lui Kirchhoff şi găsim: $U_{ab_0} + r_5 I_1 - r_4 I_2 = 0$, adică am considerat pe U_{ab_0} ca o cădere de tensiune.

Curenții I_1 şi I_2 se determină din relațiile:

$$I_1 = \frac{e_1}{r_1 + r_5} \text{ şi } I_2 = \frac{e_2}{r_2 + r_3 + r_4}$$

deci: $$U_{ab_0} = \frac{r_4 e_2}{r_2 + r_3 + r_4} - \frac{r_5 e_1}{r_1 + r_5}.$$

R_{ab} şi U_{ab_0} fiind calculați, se determină i_6 cu relația:

$$i_6 = \frac{U_{ab_0}}{R_{ab} + r_6}.$$

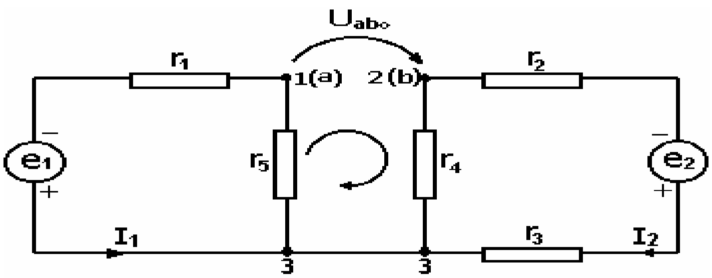


Fig.1.22

Să calculăm acum intensitatea curentului care străbate latura activă, de exemplu I_1. În acest caz bornele a şi b vor fi cele din fig.1.23.

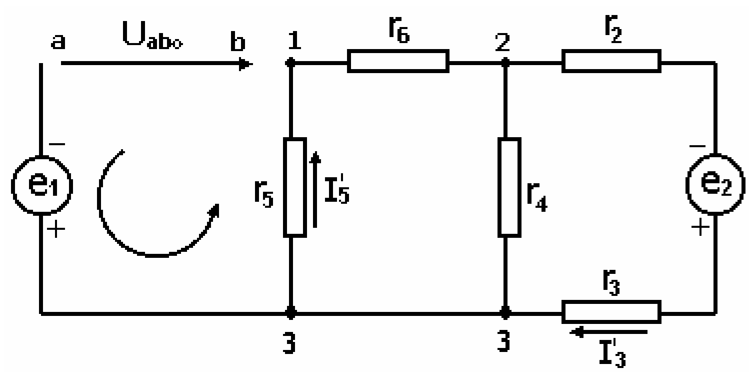


Fig. 1.23

Pasivizând circuitul, R_{ab0} va fi dat de relația:

$$R_{ab0} = \frac{r_5\left[r_6 + \dfrac{r_4\left(r_2 + r_3\right)}{r_2 + r_3 + r_4}\right]}{r_5 + r_6 + \dfrac{r_4\left(r_2 + r_3\right)}{r_2 + r_3 + r_4}};$$

Tensiunea U_{ab0} se poate calcula, aplicând teorema a II-a a lui Kirchhoff pe circuitul închis format din sursa cu t.e.m. şi rezistorul r_5, din relația:

$$e_1 = r_5 I_5^{'} - U_{ab_0},$$

$I_5^{'}$ fiind dat de relația de la divizorul de curent.

$$I_5^{'} = I_3^{'} \frac{r_4}{r_4 + r_5 + r_6} \qquad \text{şi} \qquad I_3^{'} = \frac{e_2}{r_2 + r_3 + \dfrac{r_4(r_5 + r_6)}{r_4 + r_5 + r_6}}$$

Intensitatea curentului I_1 se poate deci calcula cu relația:

$$I_1 = \frac{U_{ab0}}{R_{ab0} + r_1} \qquad (1.40)$$

1.9. Bilanțul puterilor într-un circuit simplu. Transferul maxim de putere.

Fie un circuit simplu, format dintr-o sursă cu t.e.m. egală cu e şi rezistența interioară r_i, care debitează curent electric pe rezistența de sarcină R (fig. 1.24). Scriind legea lui Ohm pentru un circuit întreg avem relația:

$$e = r_i \cdot i + R \cdot i \qquad (1.41)$$

Înmulțind ecuația (1.41) cu i se obține:

$$e \cdot i = r_i \cdot i^2 + R \cdot i^2 \qquad (1.42)$$

Termenul $e \cdot i$ reprezintă puterea debitată de sursa, $r_i \cdot i^2$ reprezintă puterea disipată pe rezistența interioară a sursei, iar $R \cdot i^2$ este puterea disipată în rezistența de sarcină. Relația (1.42) exprimă bilanțul puterilor în circuitul considerat. Puterea debitată de sursă este suma puterilor consumate pe rezistența interioară a sursei şi pe rezistența circuitului exterior. Dacă circuitul exterior este mai complicat, se ia în considerare rezistența echivalentă a circuitului exterior. În acest caz termenul $R \cdot i^2$ (unde R este rezistența echivalentă) va fi egal cu suma puterilor disipate în fiecare element component al circuitului exterior.

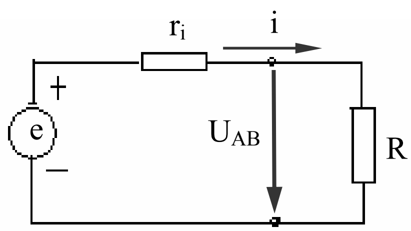


Fig. 1.24

Dacă considerăm rezistenţa de sarcină R variabilă (fig. 1.24), se pune întrebarea: care este puterea maximă ce o poate dezvolta sursa în rezistenţa R şi la ce valoare a acestei rezistenţe se obţine aceasta?.

Puterea disipată pe rezistenţa R este: $P_R = P = R \cdot i^2$

Înlocuind expresia curentului din relaţia (1.41) obţinem:

$$P = e^2 \cdot \frac{R}{(r_i + R)^2} \tag{1.43}$$

Din ecuaţia: $\frac{dP}{dR} = e^2 \cdot \frac{(r_i - R)}{(r_i + R)^3} = 0$

rezultă $R = r_i$. Deci, în rezistenţa de sarcină R se obţine puterea maximă atunci când $R = r_i$. Expresia puterii maxime este:

$$P_{max} = e^2 \cdot \frac{r_i}{(2 \times r_i)^2} = \frac{e^2}{4r_i} \tag{1.44}$$

Se remarcă faptul că P_{max} are o valoare cu atât mai mare, cu cât rezistenţa internă r_i a sursei este mai mică.

Puterea dezvoltată de sursă este $P_e = e \cdot i = \frac{e^2}{r_i + R}$, iar pentru $R=r_i$,

este:
$$P_e = \frac{e^2}{2r_i} \tag{1.45}$$

Randamentul maxim al sursei este: $\eta_{max}\,\% = \frac{P_{max}}{P_e} = 50\%$

1.10. Teorema conservării puterii în curent continuu

Enunţ. ***Intr-o reţea de curent continuu suma algebrică a puterilor debitate de sursele din reţea este egală cu suma puterilor consumate pe rezistenţele laturilor.***

$$\sum_{k=1}^{l} e_k I_k = \sum_{k=1}^{l} r_k I^2{}_k \tag{1.46}$$

Demonstraţia teoremei se face plecând de la teorema a II a lui Kirchhoff prin înmulţirea ambilor membri cu I_k. Teorema conservării puterilor serveşte la verificarea calculelor efectuate asupra unei reţele prin una din metodele de rezolvare .