

Capitolul 5

MODELUL MATEMATIC AL MASINII DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM DINAMIC

Modelul matematic al masinii de curent alternativ trifazat în regim dinamic poate fi tratat cu ajutorul unui sistem de ecuatii diferentiale neliniare, ecuatii ce prezinta dificultati de solutionare chiar daca se utilizeaza metodele numerice. Este nevoie de calculatoare electronice rapide si cu memorii foarte mari.

Aceste cerinte nu pot fi satisfacute în sistemele de comanda sau reglare automata rapide din actionarile electrice datorita volumului mare de prelucrare a datelor în timp scurt.

În ultimul timp a fost pusa la punct modelarea masinii de c.a. cu ajutorul *fazorilor spatiali*. Acestia ofera un model general si simplu al functionarii, cuprinzând atât regimul tranzitoriu cât si regimul stabilizat.

Modelul masinilor electrice de c.a. bazat pe teoria fazorilor spatiali este mai simplu decât modelul clasic în sistem trifazat, deoarece fiecare marime trifazata (curent, flux, tensiune, etc.) se reduce la un singur vector plan (fazor spatial), care matematic poate fi tratat ca o marime complexa, permitând o scriere compacta a ecuatiilor de stare. De asemenea, sistemul de ecuatii de functionare devine un sistem de *ecuatii diferentiale liniare* care pot fi integrate relativ usor prin metode numerice cu ajutorul microcalculatoarelor tip PC.

S-a creat un model bifazat ($d-q$) al masinilor de c.a. trifazate cu proprietati asemanatoare masinilor de c.c., creindu-se astfel suportul fizic pentru *teoria unitara a masinilor electrice*.

Astfel, s-au pus bazele concepiei generale a *sistemelor de reglare* a masinilor electrice cu *orientare dupa câmp*. Progresele actuale în acest domeniu sunt conditionate de introducerea tehnicii microprocesoarelor care ridica performantele actio narilor reglabile de c.a. la nivelul celor de c.c. Se observa deja tendinta de înlocuire treptata a actionarilor de c.c. cu cele de c.a. cu performante ridicate, cu robustete mai mare si cu pret mai redus.

5.1 Fazori spatiali

Fazorii spatiali sunt niste vectori “trifazati”, care indica atât *variatiia în timp* a marimilor de faza, cât si *variatiia în spatiu* a rezultantei acestora.

Întrucât la compunerea fazorului spatial intervin toate cele trei componente instantanee ale fazelor, acesta caracterizeaza întregul sistem trifazat, dupa cum urmeaza:

- indica variatiia în timp (sub forma vectoriala) a marimilor de faza;
- indica si defazajul în spatiu datorita dispunerii înfasurarilor de faza din punct de vedere constructiv, ceea ce intervine matematic prin aplicarea versorilor în directia axelor magnetice ale fazelor.

Din punct de vedere matematic, fazorii spatiali sunt de fapt vectori într-un plan perpendicular pe axa arborelui masinii.

5.1.1 Fazorii spatiali ai masinilor electrice trifazate

Este cunoscut faptul ca distributia câmpului de inductie magnetica de-a lungul întrefierului masinilor de c.a. pentru armonica fundamentala poate fi considerata sinusoidala în spatiu si timp. Variatiia sinusoidala în raport cu coordonata spatiala provine din distributia aproximativ sinusoidala a înfasurarilor si deci a solenatiei. Variatiia sinusoidala în timp a câmpului se datoreaza variatiei sinusoidale în timp (curent alternativ) a solenatiei.

În figura 5.1 s-a reprezentat o înfasurare a unei masini si distributia spatiala a solenatiei. Solenatia de-a lungul întrefierului variaza în trepte datorita distributiei discontinue a curentului din spirele înfasurarii. Cu o buna aproximatie (acceptata în teoria clasica) se înlocuieste variatiia în trepte cu variatiia continua a armonicii fundamentale a solenatiei, neglijând armonicele spatiale ale acesteia.

Distributia spatiala a solenatiei poate fi reprezentata de un vector spatial $\underline{\theta}$ care are directia în sensul valorii maxime a sinusoidalei, iar lungimea lui egala cu aceasta valoare maxima. Unei valori instantanee a curentului dintr-o înfasurare de faza îi corespunde totdeauna un vector spatial de directie fixa dupa axa magnetica a înfasurarii, iar lungimea si sensul acestui vector este determinat de valoarea instantanee a curentului în momentul respectiv.

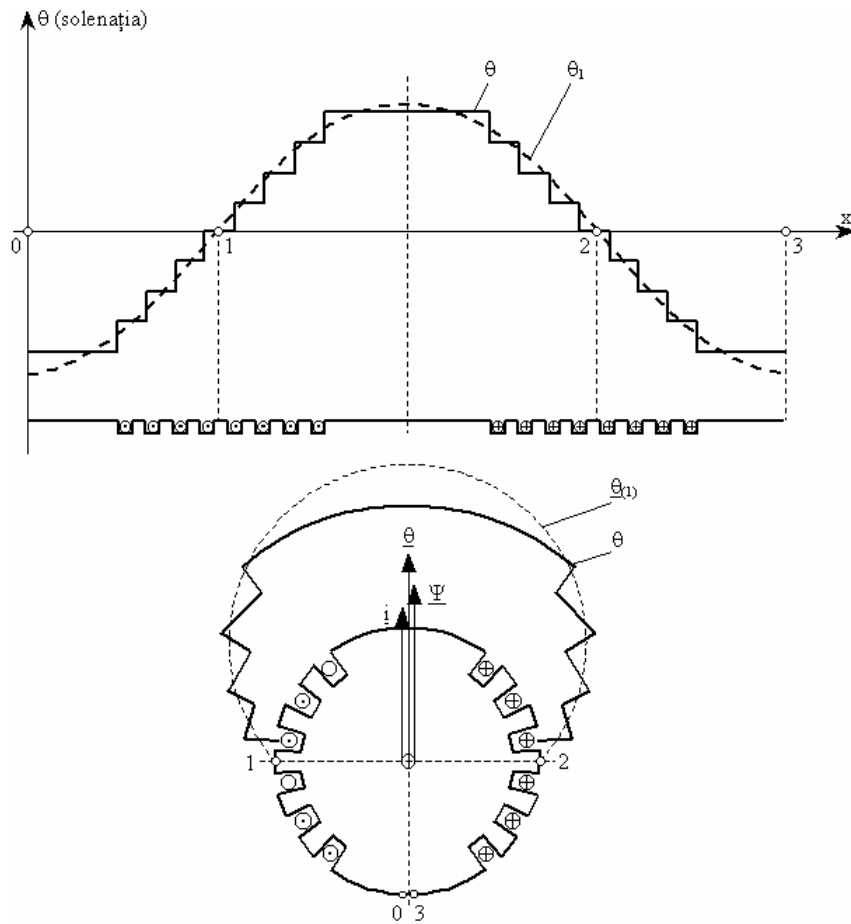


Figura 5.1

Întrucât fluxul magnetic este proportional cu curentul $\underline{\Psi} = L \cdot \underline{i}$, iar curentul este proportional cu solenatia $\underline{\theta} = N \cdot \underline{i}$, rezulta ca fluxul, de asemenea, poate fi reprezentat ca un vector spatial de aceeași direcție, caracterizând câmpul magnetic din întrefier.

În cazul unei masini trifazate, vom avea trei înfășurări, conform figurii 5.2, unde sau reprezentat: liniile de câmp ale fazei a (figura 5.2, a), reprezentarea simbolica după direcția axei de magnetizare a înfășurarilor fazelor a, b și c (figura 5.2, b) și vectorii spațiali ai curentilor din cele trei faze (figura 5.2, c).

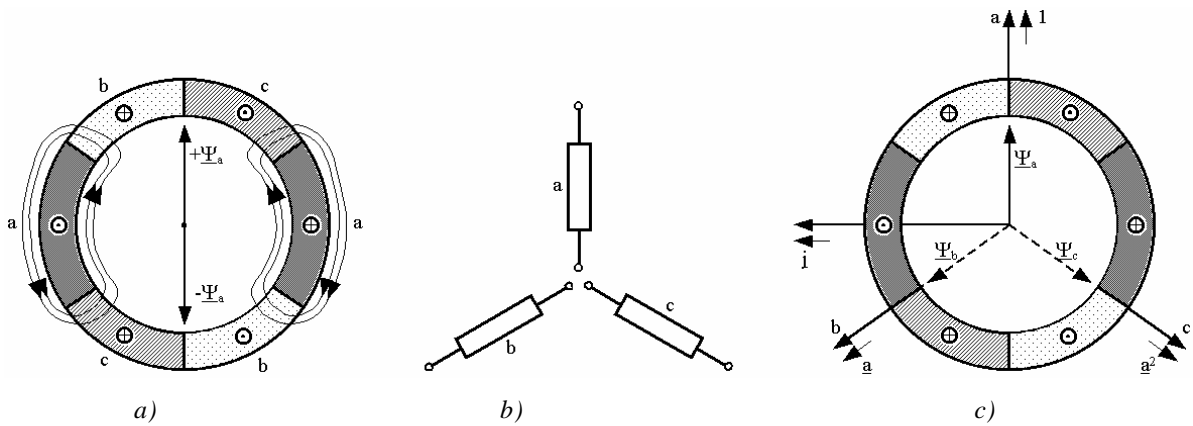


Figura 5.2

Apar astfel vectorii spatiali ai curentilor, $\underline{i}_a, \underline{i}_b$ si \underline{i}_c defazati în spatiu cu unghiurile $\frac{2 \cdot \pi}{3}$, respectiv $\frac{4 \cdot \pi}{3}$, iar lungimea si sensul fiecaruia corespunde valorii instantanee a curentului din faza respectiva.

Directia în *spatiu* a vectorilor spatiali de curent este data de pozitia în spatiu a înfasurarilor.

La variatia în *timp* a curentilor $\underline{i}_a, \underline{i}_b$ si \underline{i}_c nu s-a pus nici o conditie, deci ei pot sa varieze dupa orice lege (cu valori constante variabile periodic, sinusoidala, aperiodica sau combinatia acestora).

Cunoscând axa reala a sistemului de coordonate ca fiind axa de magnetizare a fazei a, atunci vectorii spatiali de curent ai celor trei faze se vor putea scrie cu ajutorul operatorului complex cunoscut $\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ si vor avea forma:

$$\underline{i}_a = i_a; \underline{i}_b = \underline{a} \cdot i_b; \underline{i}_c = \underline{a}^2 \cdot i_c. \tag{5.1}$$

Fazorul spatial de curent se defineste ca fiind suma vectoriala:

$$\underline{i} = \frac{2}{3} \cdot (i_a + \underline{a} \cdot i_b + \underline{a}^2 \cdot i_c) \tag{5.2}$$

în care factorul $\frac{2}{3}$ (în general $\frac{2}{m}$ la masina m-fazata) provine de la faptul ca solenatia rezultanta la masina trifazata este $\frac{3}{2}$ din solenatia unei faze. Pornind în sens invers, daca din solenatia rezultanta dorim sa obtinem solenatia unei faze, atunci existenta factorului $\frac{2}{3}$ este evidenta.

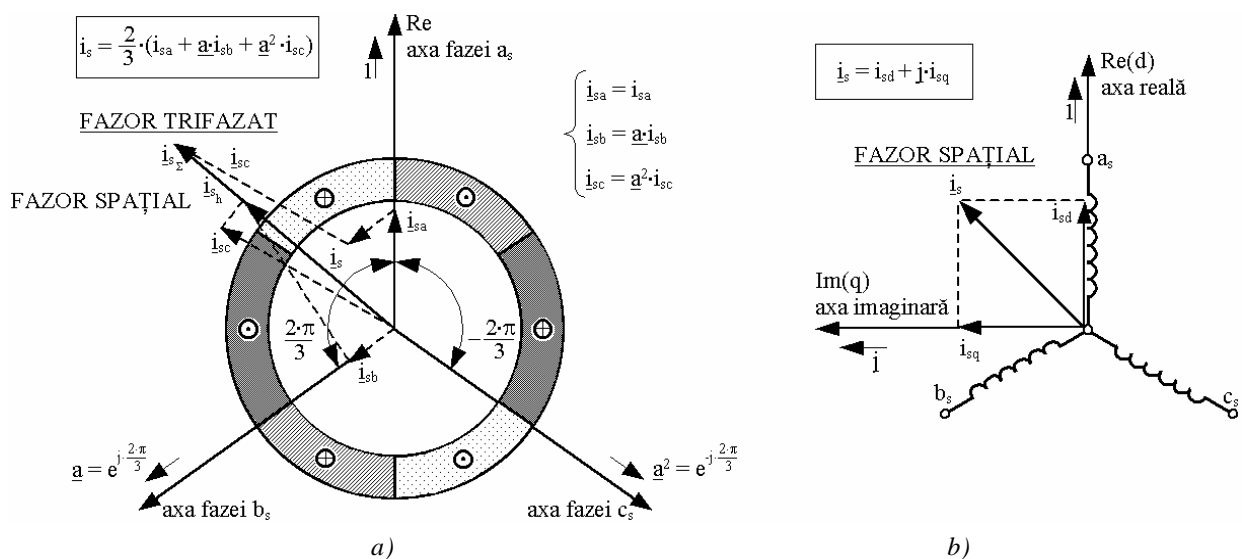


Figura 5.3

În figura. 5.3, a s-a reprezentat fazorul spatial de curent la un moment dat, tinând seama de sensul si valoarea vectorilor spatiali din cele trei faze la acel moment.

Din relatia (5.2) rezulta ca daca nu se pune nici o conditie pentru variatia în timp a curentilor $\underline{i}_a, \underline{i}_b$, si \underline{i}_c , atunci fazorul spatial al curentului \underline{i} are o valoare si directie în spatiu determinate de variatia curentilor din cele trei faze.

În mod similar se defineste fazorul spatial al fluxului magnetic dat de cele trei faze:

$$\underline{\Psi} = \frac{2}{3} \cdot (\Psi_a + \underline{a} \cdot \Psi_b + \underline{a}^2 \cdot \Psi_c). \quad (5.3)$$

Daca fazorii spatiali dati de relatiile (5.2) si (5.3) sunt produsii într-o înfasurare satorica, atunci marimile vor avea indicele "s":

$$\begin{aligned} \underline{i}_s &= \frac{2}{3} \cdot (\underline{i}_{sa} + \underline{a} \cdot \underline{i}_{sb} + \underline{a}^2 \cdot \underline{i}_{sc}); \\ \underline{\Psi}_s &= \frac{2}{3} \cdot (\Psi_{sa} + \underline{a} \cdot \Psi_{sb} + \underline{a}^2 \cdot \Psi_{sc}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

În mod cu totul analog, acesti fazori se pot scrie si pentru înfasurarea rotorica, folosind indicele "r":

$$\begin{aligned} \underline{i}_r &= \frac{2}{3} \cdot (\underline{i}_{ra} + \underline{a} \cdot \underline{i}_{rb} + \underline{a}^2 \cdot \underline{i}_{rc}); \\ \underline{\Psi}_r &= \frac{2}{3} \cdot (\Psi_{ra} + \underline{a} \cdot \Psi_{rb} + \underline{a}^2 \cdot \Psi_{rc}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Din cele de mai sus, rezulta ca cele trei marimi instantanee de faza ale curentului si fluxului se pot descrie cu ajutorul unei singure marimi, fazorul spatial de curent sau de flux care la rândul sau poate fi descompus în planul complex în doua componente, cea reala, respectiv cea imaginara, conform figurii 5.3, b:

$$\underline{i}_s = i_{sd} + j \cdot i_{sq}; \quad \underline{\Psi}_s = \Psi_{sd} + j \cdot \Psi_{sq} \quad (5.6)$$

axa reala având directia axei de magnetizare a fazei a.

Fazorul spatial are o proprietate specifica si anume, daca sistemul de marimi instantanee nu are componenta homopolara, atunci proiectia lui pe cele trei axe ale fazorilor ne da valoarea instantanee a marimii considerate în faza respectiva. Proprietatea se pastreaza si când exista componenta homopolara, cu restrictia ca din aceasta proiectie pe o faza, trebuie scazuta componenta homopolara pentru a obtine valoarea instantanee a marimii considerate din acea faza (figura 5.3, a).

5.1.2 Interpretarea matriciala a fazorilor spatiali

Consideram fazorul spatial al curentului:

$$\underline{i} = \frac{2}{3} \cdot (\underline{i}_a + \underline{a} \cdot \underline{i}_b + \underline{a}^2 \cdot \underline{i}_c) \quad (5.7)$$

care se poate descompune dupa cele doua axe ale planului complex:

$$\underline{i} = \underline{i}_d + j \cdot \underline{i}_q. \quad (5.8)$$

Relatiile (5.7) si (5.8) ne arata posibilitatea trecerii de la sistemul trifazat de marimi instantanee ale unei masini trifazate, la sistemul bifazat de componente în planul complex, adica masina trifazata se înlocuieste cu o masina echivalenta bifazata la care trebuie sa se tina seama si de componenta homopolara (daca exista):

$$\underline{i}_0 = \frac{1}{3} \cdot (\underline{i}_a + \underline{i}_b + \underline{i}_c). \quad (5.9)$$

Relatiile (5.7), (5.8), (5.9) se pot scrie si matricial, definind matricile componentelor sistemelor trifazate $[\underline{i}]$ si bifazate $[\underline{i}]_{\perp}$:

$$[\underline{i}] = \begin{bmatrix} \underline{i}_a \\ \underline{i}_b \\ \underline{i}_c \end{bmatrix}; \quad [\underline{i}]_{\perp} = \begin{bmatrix} \underline{i}_d \\ \underline{i}_q \\ \underline{i}_0 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Legatura dintre cele doua matrici o va face chiar matricea fazorului spatial:

$$[\underline{i}] = \begin{bmatrix} \underline{i} \\ \underline{i}^* \\ \underline{i}_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{i}_a \\ \underline{i}_b \\ \underline{i}_c \end{bmatrix} = [\underline{a}] \cdot [\underline{i}]; \quad (5.11)$$

$$[\underline{i}] = \begin{bmatrix} \underline{i} \\ \underline{i}^* \\ \underline{i}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{i}_d \\ \underline{i}_q \\ \underline{i}_0 \end{bmatrix} = [\underline{J}] \cdot [\underline{i}]_{\perp}. \quad (5.12)$$

Din identificarea relatiilor (5.11) si (5.12), rezulta o relatie de legatura:

$$[\underline{i}] = [\underline{a}] \cdot [\underline{i}] = [\underline{J}] \cdot [\underline{i}]_{\perp} \quad (5.13)$$

din care se pot obtine matricile de transformare din sistemul trifazat în sistemul bifazat de coordonate si invers:

$$[\underline{i}]_{\perp} = [\underline{J}]^{-1} \cdot [\underline{a}] \cdot [\underline{i}] = [\underline{A}] \cdot [\underline{i}] \quad (5.14)$$

unde:

$$[A] = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

respectiv:

$$[i] = [a]^{-1} \cdot [J] \cdot [i]_{\perp} = [A]^{-1} \cdot [i]_{\perp} \quad (5.16)$$

unde:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Efectuând operațiile matriciale în relațiile (5.14) și (5.16), se obțin:

$$\begin{cases} i_d = i_a - i_c; \\ i_q = \frac{i_b - i_c}{3}; \\ i_0 = \frac{1}{3} \cdot (i_a + i_b + i_c); \end{cases} \quad (5.18)$$

respectiv:

$$\begin{cases} i_a = i_d + i_0; \\ i_b = -\frac{i_d}{2} + \frac{3}{2} \cdot i_q + i_0; \\ i_c = -\frac{i_d}{2} - \frac{3}{2} \cdot i_q + i_0; \end{cases} \quad (5.19)$$

sau dacă componenta homopolara este nulă:

$$\begin{cases} i_a = i_d; \\ i_b = -\frac{i_d}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i_q; \\ i_c = -\frac{i_d}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i_q. \end{cases} \quad (5.20)$$

5.1.3 Transformari de coordonate ale fazorilor spatiali

La masinile asincrone, fluxurile $\underline{\Psi}_s$ si $\underline{\Psi}_r$ fac legatura dintre ecuatiile de tensiuni ale statorului si rotorului, de aceea apare necesitatea scrierii marimilor din aceste ecuatii în acelasi sistem de axe de coordonate. Într-un sistem de coordonate $d-q$, un fazor spatial \underline{i} se defineste prin modulul sau $|\underline{i}| = i$ si argumentul sau φ (fig. 5.4):

$$\underline{i} = i \cdot e^{j\varphi}. \tag{5.21}$$

Daca sistemul de coordonate se roteste cu viteza unghiulara ω_α expresia fazorului spatial raportat la acest sistem de coordonate ($d_\alpha-q_\alpha$) pentru unghiul curent α , va fi:

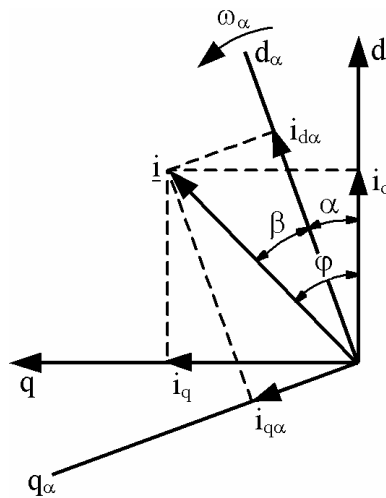
$$\underline{i} = i \cdot e^{j(\varphi-\alpha)} = i \cdot e^{+j\beta}$$

unde:

$$\alpha = \alpha_0 + \int \omega_\alpha dt; \quad \omega_\alpha = \frac{d\alpha}{dt}.$$

Alegerea sistemului de coordonate depinde de natura problemei tratate. De exemplu, daca se trateaza procesele masinii asincrone simetrice, atât în stator cât si în rotor, masina fiind alimentata cu tensiuni simetrice, atunci este indicat sa folosim un sistem de coordonate ce se roteste cu viteza de sincronism ω_1 .

Trecerea de la sistemul $d-q$ fix fata de stator, având axa reala (d) suprapusa peste axa magnetica a fazei a la sistemul ($d_\alpha-q_\alpha$) care se roteste cu viteza ω_α se face proiectând fazorul spatial \underline{i} pe cele doua sisteme de coordonate (vezi figura. 5.4):



$$\begin{cases} i_{d\alpha} = i_d \cdot \cos \alpha + i_q \cdot \sin \alpha; \\ i_{q\alpha} = -i_d \cdot \sin \alpha + i_q \cdot \cos \alpha. \end{cases} \tag{5.22}$$

Matricial, relatiile (5.22) se pot scrie:

$$\begin{bmatrix} i_{d_\alpha} \\ i_{q_\alpha} \\ i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

sau:

$$[i]_\perp = [D(\alpha)] \cdot [i]_\perp. \quad (5.24)$$

Sintetizând, trecerea de la sistemul de coordonate trifazat, fix fata de stator, la sistemul de coordonate $(d\alpha-q\alpha)$ ce se rotește cu viteza unghiulara ω_α se va face prin matricea de transformare $[T(\alpha)]$:

$$[i]_\perp = [D(\alpha)] \cdot [i]_\perp = [D(\alpha)] \cdot [A] \cdot [i] = [T(\alpha)] \cdot [i] \quad (5.25)$$

unde:

$$[T(\alpha)] = [D(\alpha)] \cdot [A] = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) & \cos \left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) \\ -\sin \alpha & -\sin \left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) & -\sin \left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

iar transformarea inversa prin matricea $[T(\alpha)]^{-1}$

$$[i] = [A]^{-1} \cdot [i]_\perp = [A]^{-1} \cdot [D(\alpha)]^{-1} \cdot [i]_\perp = [T(\alpha)]^{-1} \cdot [i]_\perp \quad (5.27)$$

unde:

$$[T(\alpha)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 1 \\ \cos \left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) & -\sin \left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) & 1 \\ \cos \left(\alpha + \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) & -\sin \left(\alpha + \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) & 1 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

iar, $\alpha = \omega_\alpha \cdot t$.

Consideram componenta homopolara nula ($i_0 = 0$), ecuatiile de transformare devin:

$$\begin{cases} i_d = \frac{2}{3} \cdot \left[i_a \cdot \cos \alpha + i_b \cdot \cos \left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) + i_c \cdot \cos \left(\alpha + \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) \right]; \\ i_q = -\frac{2}{3} \cdot \left[i_a \cdot \sin \alpha + i_b \cdot \sin \left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) + i_c \cdot \sin \left(\alpha + \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) \right]; \end{cases} \quad (5.29)$$

respectiv:

$$\begin{cases} i_a = i_d \cdot \cos \alpha - i_q \cdot \sin \alpha; \\ i_b = i_d \cdot \cos\left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) - i_q \cdot \sin\left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right); \\ i_c = i_d \cdot \cos\left(\alpha + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) - i_q \cdot \sin\left(\alpha + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right); \end{cases} \quad (5.30)$$

unde marimile instantanee i_a, i_b si i_c pot avea orice tip de variatie în timp (sinusoidala, dreptunghiulara, etc.), cu conditia:

$$i_0 = \frac{1}{3} \cdot (i_a + i_b + i_c) = 0.$$

5.2 Ecuatiile generale ale masinii asincrone trifazate

Masunile electrice, ca elemente de executie în sistemele de reglare automata, necesita un model matematic, care sa descrie regimul dinamic al masinii.

Modelul cel mai potrivit, care este capabil de a solutiona atât problemele masinii cât si ale reglarii, este bazat pe teoria fazorilor spatiali. Acest model ofera ideea sistemului de reglare cel mai fizic si simplu structurat, conceput pe baza *principiului orientarii dupa câmp*.

Principiul orientarii dupa câmp, consta matematic din raportarea ecuatiilor masinii la un sistem legat de fazorul spatial al fluxului statoric, rotoric, sau din întrefier.

La sistemele de reglare bazate pe acest principiu, marimile de reglare rezulta direct din componentele fazorului spatial de curent raportat la sistemul de axe orientat dupa câmp.

Asadar, atât modelul cât si reglarea masinii de curent alternativ, devine structural asemanatoare celei ale masinii de curent continuu compensata, cu excitatie separata, care are cel mai simplu sistem de reglare.

Întrucât la definirea fazorului spatial nu s-a pus nici o restrictie în ceea ce priveste variatia în timp a marimilor de faza, care determina acest fazor, modelul este astfel valabil pentru orice regim de functionare tranzitoriu sau stabilizat.

Pentru a pastra generalitatea si din punct de vedere matematic, s-a ales în mod arbitrar un sistem comun de axe ortogonale $(d\alpha - q\alpha)$ ce se rotește cu viteza $\omega_\alpha, \left(\omega_\alpha = \frac{d\alpha}{dt}\right)$.

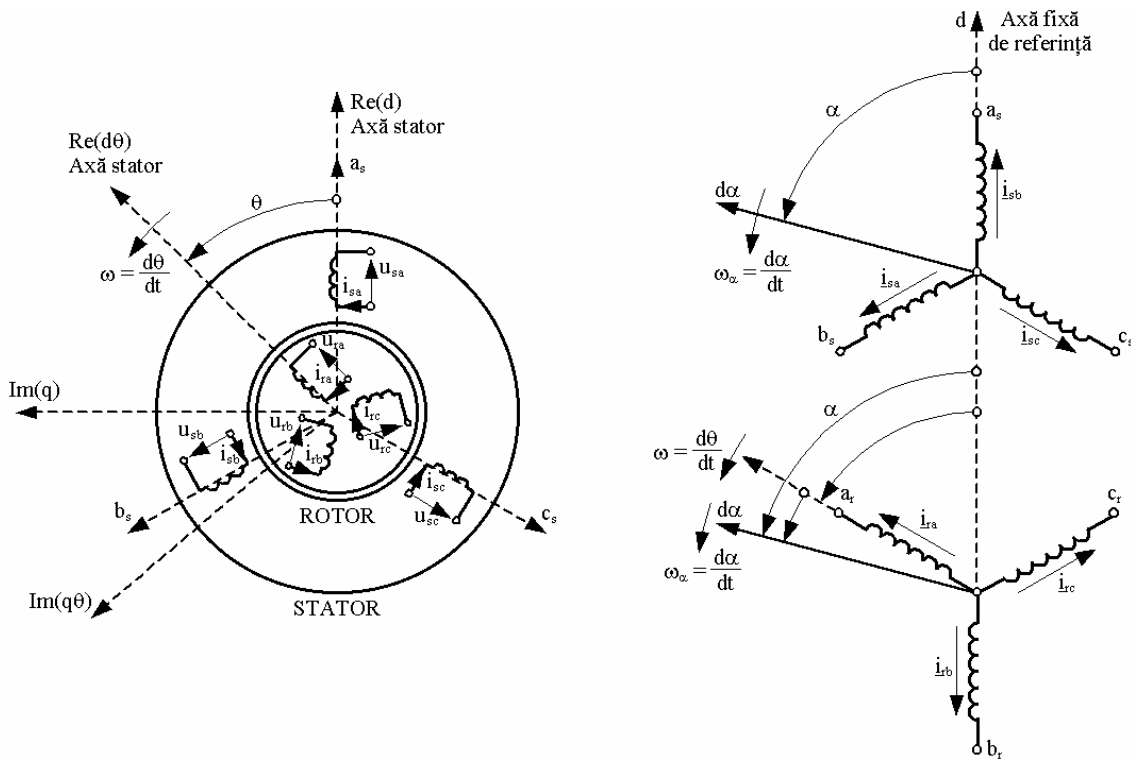


Figura 5.5

În figura 5.5, s-a reprezentat schematic o masina asincrona trifazata cu înfasurari simetrice si cu rotor bobinat, ($p = 1$) indicându-se sensurile de referinta pentru tensiunile si curentii din stator si rotor si pozitia relativa a rotorului fata de stator, caracterizata prin unghiul $\theta \left(\omega = \frac{d\theta}{dt} \right)$.

De asemenea, se considera repartitia sinusoidala a înfasurarilor pe periferia întrefierului si se neglijeaza pierderile în fier.

Ecuatiile de tensiuni statorice si rotorice în marimi instantanee pot fi scrise:

$$\begin{aligned} [u_s] &= R_s \cdot [i_s] + \frac{d}{dt} [\Psi_s] \\ [u_r] &= R_r \cdot [i_r] + \frac{d}{dt} [\Psi_r] \end{aligned} \quad (5.31)$$

unde:

R_s – rezistenta unei faze statorice;

R_r – rezistenta unei faze rotorice raportate la stator.

Într-un sistem unic de coordonate ($d\alpha - q\alpha$) ce se rotește cu viteza unghiulara ω_α , ecuatiile (5.31), scrise cu fazori spatiali devin:

$$\begin{aligned} \underline{u}_{s\alpha} &= R_s \cdot \underline{i}_{s\alpha} + \frac{d\Psi_{s\alpha}}{dt} + j \cdot \omega_\alpha \cdot \Psi_{r\alpha} \\ \underline{u}_{r\alpha} &= R_r \cdot \underline{i}_{r\alpha} + \frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} + j \cdot (\omega_\alpha - \omega) \cdot \Psi_{r\alpha} \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}\underline{\Psi}_{s\alpha} &= L_s \cdot \dot{i}_{s\alpha} + L_m \cdot \dot{i}_{r\alpha} \\ \underline{\Psi}_{r\alpha} &= L_r \cdot \dot{i}_{r\alpha} + L_m \cdot \dot{i}_{s\alpha}\end{aligned}\quad (5.33)$$

unde:

L_s	– inductivitatea totala statorica:	$L_s = L_{d_s} + L_{s_s}$
L_r	– inductivitatea totala rotorica raportata la stator:	$L_r = L'_{d_r} + L'_{r_r}$;
L_{d_s}	– inductivitatea statorica de dispersie:	$L_{d_s} = \frac{X_{d_s}}{\omega_1}$;
L_{d_r}	– inductivitatea rotorica de dispersie raportata la stator:	$L'_{d_r} = \frac{X'_{d_r}}{\omega_1}$;
L_{s_s}	– inductivitatea ciclica proprie statorica:	$L_{s_s} = \frac{X_m}{\omega_1}$;
L_{r_r}	– inductivitatea ciclica proprie rotorica raportata la stator:	$L'_{r_r} = \frac{L_m}{k_T} = \frac{X_m}{k_T^2 \cdot \omega_1}$;
L_m	– inductivitatea mutuala stator-rotor, raportata la stator:	$L_m = \frac{X_m}{k_T \cdot \omega_1}$;

iar:

X_{d_s}	– reactanta de dispersie statorica;	
X'_{d_r}	– reactanta de dispersie rotorica raportata la stator:	$X'_{d_r} = X_{d_r} \cdot k_T^2$;
X_m	– reactanta de magnetizare;	
k_T	– raportul de transformare:	$k_T = \frac{N_1 \cdot k_{N1}}{N_2 \cdot k_{N2}}$;

se obtin din schema echivalenta a masinii asincrone în regim stationar. (vezi paragraful 3.2.2).

Sistemului de ecuatii (5.32) i se adauga ecuatie de miscare binecunoscuta:

$$m - m_r = J \cdot \frac{d\Omega}{dt}; \quad \Omega = \frac{\omega}{p} \quad (5.34)$$

unde cuplul electromagnetic dezvoltat, are expresia:

$$m = \frac{3}{2} \cdot p \cdot I_m \cdot (\underline{\Psi}_{r\alpha} \cdot \dot{i}_{r\alpha}^*) \quad (5.35)$$

Explicitând ecuatiile (5.32) si (5.33) pe cele doua componente $d\alpha$ si $q\alpha$ se obtine sistemul:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{sd\alpha} = R_s \cdot i_{sd\alpha} + \frac{d\Psi_{sd\alpha}}{dt} - \omega \cdot \Psi_{sq\alpha}; \\ u_{sq\alpha} = R_s \cdot i_{sq\alpha} + \frac{d\Psi_{sq\alpha}}{dt} + \omega \cdot \Psi_{sd\alpha}; \\ -u_{rd\alpha} = R_r \cdot i_{rd\alpha} + \frac{d\Psi_{rd\alpha}}{dt} - (\omega_\alpha - \omega) \cdot \Psi_{rq\alpha}; \\ -u_{rq\alpha} = R_r \cdot i_{rq\alpha} + \frac{d\Psi_{rq\alpha}}{dt} + (\omega_\alpha - \omega) \cdot \Psi_{rd\alpha}; \\ \frac{3}{2} \cdot p \cdot (\Psi_{rq\alpha} \cdot i_{rd\alpha} - \Psi_{rd\alpha} \cdot i_{rq\alpha}) - m_r = \frac{J}{p} \cdot \frac{d\omega}{dt}. \end{array} \right. \quad (5.36)$$

sau daca descompunem fluxurile totale, conform relatiilor (5.33), se obtine sistemul:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{sd\alpha} = R_s \cdot i_{sd\alpha} + L_s \cdot \frac{di_{sd\alpha}}{dt} + L_m \cdot \frac{di_{rd\alpha}}{dt} - \omega \cdot (L_s \cdot i_{sq\alpha} + L_m \cdot i_{rq\alpha}); \\ u_{sq\alpha} = R_s \cdot i_{sq\alpha} + L_s \cdot \frac{di_{sq\alpha}}{dt} + L_m \cdot \frac{di_{rq\alpha}}{dt} + \omega \cdot (L_s \cdot i_{sd\alpha} + L_m \cdot i_{rd\alpha}); \\ -u_{rd\alpha} = R_r \cdot i_{rd\alpha} + L_r \cdot \frac{di_{rd\alpha}}{dt} + L_m \cdot \frac{di_{sd\alpha}}{dt} - (\omega_\alpha - \omega) \cdot (L_r \cdot i_{rq\alpha} + L_m \cdot i_{sq\alpha}); \\ -u_{rq\alpha} = R_r \cdot i_{rq\alpha} + L_r \cdot \frac{di_{rq\alpha}}{dt} + L_m \cdot \frac{di_{sq\alpha}}{dt} + (\omega_\alpha - \omega) \cdot (L_r \cdot i_{rd\alpha} + L_m \cdot i_{sd\alpha}); \\ \frac{3}{2} \cdot p \cdot L_m \cdot (i_{sq\alpha} \cdot i_{rd\alpha} - i_{sd\alpha} \cdot i_{rq\alpha}) - m_r = \frac{J}{p} \cdot \frac{d\omega}{dt}. \end{array} \right. \quad (5.37)$$

care reprezinta sistemul de ecuatii generale ale masinii asincrone.

Este adevarat ca studiul regimului stationar al masinii asincrone alimentate de la surse sinusoidale, se poate face în mod traditional mai simplu, utilizând ecuatiile cu fazori Fresnell [2], precum si caracteristicile mecanice ale masinii de inductie si ale masinii de lucru.

Dar studiul regimului dinamic este greoi pe cale traditionala, cu ecuatii scrise pentru toate fazele masinii în caz general.

Studiul regimului dinamic al masinii asincrone devine considerabil usurat utilizând modelul cu fazori spatiali, deci sistemul de ecuatii (5.37).

Acest studiu se face în trei etape:

- transformarea marimilor trifazate prin intermediul fazorilor spatiali, în marimi de calcul corespunzatoare proiectiilor pe axele $d\alpha - q\alpha$;
- rezolvarea sistemului de ecuatii (5.37) prin metode numerice;
- revenirea la marimile trifazate masurabile, prin intermediul transformarii inverse.

Pentru prima etapa, se considera, în mod convenabil, un sistem de coordonate $d\alpha - q\alpha$ ce

se rotește cu viteza de sincronism $\omega_1 \left(\omega_1 = \frac{d\alpha}{dt} \right)$ si pe care îl vom denumi generic $d - q$.

Consideram de asemenea, un sistem de tensiuni statorice de alimentare sinusoidale simetrice sub forma:

$$\begin{cases} u_a = U_s \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t - \gamma); \\ u_b = U_s \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\omega_1 \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3} - \gamma\right); \\ u_c = U_s \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\omega_1 \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3} - \gamma\right). \end{cases} \quad (5.38)$$

unde γ reprezinta faza conectarii în grade electrice.

Componentele d–q ale fazorului tensiunii statorice \underline{u}_s în planul d–q mai sus definit, se obtin aplicând matricea de transformare $[T(\alpha)]$ (vezi relatia 5.26), unde $\alpha = \omega_1 \cdot t$:

$$\begin{cases} u_{sd} = \frac{2}{3} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \cdot u_a + \frac{2}{3} \cdot \cos\left(\omega_1 \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot u_b + \frac{2}{3} \cdot \cos\left(\omega_1 \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot u_c; \\ u_{sq} = -\frac{2}{3} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \cdot u_a - \frac{2}{3} \cdot \sin\left(\omega_1 \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot u_b - \frac{2}{3} \cdot \sin\left(\omega_1 \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \cdot u_c. \end{cases} \quad (5.39)$$

Înlocuind relatiile (5.38) în (5.39), dupa calcule trigonometrice, se obtine:

$$\begin{cases} u_{sd} = U_s \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \gamma; \\ u_{sq} = U_s \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \gamma. \end{cases} \quad (5.40)$$

Se obtine astfel, în sistemul de coordonate considerat, doua *tensiuni constante, invariabile în timp*, depinzând doar de faza conectarii. Acest lucru va duce la usurarea considerabila a calculului ulterior.

Etapa a doua a studiului – rezolvarea sistemului de ecuatii (5.37) se realizeaza prin metode numerice (Runge–Kutta, Transformata Z etc.), cu ajutorul calculatoarelor electronice tip PC.

Pentru a usura rezolvarea acestui sistem diferential de ordinul 5, profund nelinier, se aduce la forma:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{X}] = [\mathbf{T} \cdot \mathbf{L}] \quad (5.41)$$

unde variabilele vor fi:

$$[\mathbf{X}] = [i_{sd}, i_{sq}, i_{rd}, i_{rq}, \omega]^T$$

iar termenul liber:

$$[\mathbf{T} \cdot \mathbf{L}] = [F_1, F_2, F_3, F_4, F_5]^T$$

unde: F_i , $i = 1 \dots 5$ sunt functii de necunoscuta.

Sistemul (5.37), dupa prelucrari simple devine:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_{sd}}{dt} = \frac{B_1 \cdot L_r - B_3 \cdot L_m}{L_s \cdot L_r - L_m^2}; \\ \frac{di_{sq}}{dt} = \frac{B_2 \cdot L_r - B_4 \cdot L_m}{L_s \cdot L_r - L_m^2}; \\ \frac{di_{rd}}{dt} = \frac{B_3 \cdot L_s - B_1 \cdot L_m}{L_r \cdot L_s - L_m^2}; \\ \frac{di_{rq}}{dt} = \frac{B_4 \cdot L_s - B_2 \cdot L_m}{L_r \cdot L_s - L_m^2}; \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{P}{J} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot p \cdot L_m \cdot (i_{sq} \cdot i_{rd} - i_{sd} \cdot i_{rq}) - m_r \right]; \end{array} \right. \quad (5.42)$$

unde:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = u_{sd} - R_s \cdot i_{sd} + \omega \cdot (L_s \cdot i_{sq} + L_m \cdot i_{rq}); \\ B_2 = u_{sq} - R_s \cdot i_{sq} - \omega \cdot (L_s \cdot i_{sd} + L_m \cdot i_{rd}); \\ B_3 = -R_r \cdot i_{rd} + (\omega_1 - \omega) \cdot (L_r \cdot i_{rq} + L_m \cdot i_{sq}); \\ B_4 = -R_r \cdot i_{rq} - (\omega_1 - \omega) \cdot (L_r \cdot i_{rd} + L_m \cdot i_{sd}). \end{array} \right. \quad (5.43)$$

Sistemul astfel definit, poate fi scris cu diferente finite cu ajutorul unei metode de integrare numerica (transformata Z, Runge – Kutta, etc.).

Pasul de integrare se va alege cu deosebita grija, tinând cont de frecventa maxima si constanta de timp cea mai mica. Se recomanda o prima estimare la cca. $\frac{1}{5} \div \frac{1}{10}$ din constanta de timp minima.

Algoritmul etapei a treia, se obtine punând problema inversa: se cer curentii i_{sa} , i_{sb} , i_{sc} , cunoscând curentii i_{sd} , i_{sq} .

Aplicând matricea transformatei inverse $[T(\alpha)]^{-1}$ (vezi relatia 5.28), se obtine:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{sa} = i_{sd} \cos \omega_1 t - i_{sq} \sin \omega_1 t; \\ i_{sb} = i_{sd} \cos \left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3} \right) - i_{sq} \sin \left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3} \right); \\ i_{sc} = i_{sd} \cos \left(\omega_1 t + \frac{2\pi}{3} \right) + i_{sq} \sin \left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3} \right). \end{array} \right. \quad (5.44)$$