

## CÂMPUL ELECTROMAGNETIC NESTAȚIONAR

### 7.1. ECUAȚIILE LUI MAXWELL

Se consideră un mediu în repaus (imobil), liniar, omogen și izotrop lipsit de polarizație electrică permanentă ( $\mathbf{P}_p = 0$ ), de magnetizație permanentă ( $\mathbf{M}_p = 0$ ) și de câmp imprimat ( $\mathbf{E}_i = 0$ ). În aceste condiții, câmpul electromagnetic este caracterizat de următoarele forme locale ale legilor generale, numite *ecuațiile lui Maxwell*

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v; \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (7.1)$$

completate cu legile de material:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (7.2)$$

Introducând relațiile (7.2) în (7.1), se obțin ecuațiile în variabilele  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}; \operatorname{div} \mathbf{H} = 0; \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (7.3)$$

Pe baza ecuațiilor (7.3) se stabilesc ecuațiile de ordinul doi pe care le satisfac intensitățile câmpurilor electric  $\mathbf{E}$  și magnetic  $\mathbf{H}$ . În acest sens, se aplică operatorul rotor celei de a treia ecuație (7.3) și ținând seama de a patra ecuație (7.3), se obține:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (7.4)$$

Pe de altă parte însă, ținând seama de prima relație (7.3), rezultă:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = \operatorname{grad} \frac{\rho_v}{\varepsilon} - \Delta \mathbf{E}. \quad (7.5)$$

Prin urmare, intensitatea câmpului electric satisface ecuația:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} \frac{\rho_v}{\varepsilon}. \quad (7.6)$$

Similar, aplicând operatorul rotor celei de a patra ecuație (7.3) și ținând seama de a doua și a treia ecuație (7.3), rezultă:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}, \quad (7.7)$$

respectiv:

$$\Delta \mathbf{H} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (7.8)$$

Deci intensitățile câmpurilor electric  $\mathbf{E}$  și magnetic  $\mathbf{H}$  satisfac ecuații de ordinul doi (7.6, 7.8) de tip hiperbolic.

Considerăm conductivitatea dielectricului ca fiind nulă ( $\sigma = 0$ ) și că în dielectric nu există sarcini electrice ( $\rho_v = 0$ ). Într-un astfel de mediu pot exista numai curenți de deplasare, densitatea curenților de conducție fiind nulă,  $\mathbf{J} = 0$ . În aceste medii, ecuațiile lui Maxwell devin:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad (7.9)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (7.10)$$

iar ecuațiile de ordinul doi (7.6) și (7.8) au forma ecuației undelor :

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}; \quad \Delta \mathbf{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (7.11)$$

## 7.2. UNDE ELECTROMAGNETICE

Câmpul electric variabil în timp produce în conformitate cu legea circuitului magnetic, câmp magnetic, iar acesta fiind variabil în timp stabilește în acord cu legea inducției electromagnetice un câmp electric. Din aproape în aproape, în timp și în spațiu, fiecare dintre câmpurile electric, respectiv magnetic, este condiționat de cel magnetic, respectiv electric și constituie *unda electromagnetică*. În acest fel, câmpul electromagnetic este produs exclusiv prin interacțiunea dintre câmpul electric și câmpul magnetic, ambele variabile în timp. În cazul particular al câmpului electromagnetic ale cărui mărimi de stare locală au la un moment dat aceleași valori în toate punctele unui plan perpendicular pe o direcție, unda electromagnetică este plană. Direcția normală pe planul undei se numește *direcție de propagare*. O astfel de undă se stabilește într-un dielectric izotrop și omogen la o distanță destul de mare de sursele de câmp electromagnetic care ar ocupa domenii finite (de exemplu o antenă de emisie).

### 7.2.1. Unda electromagnetică plană după direcția uneia dintre axele de coordonate

În dielectricul liniar, izotrop și omogen ( $\sigma=0$ ) de permitivitate  $\varepsilon$  și permeabilitate  $\mu$  constante, unda electromagnetică plană este caracterizată de o familie de plane paralele în care intensitățile câmpurilor electric  $\mathbf{E}$  și magnetic  $\mathbf{H}$  au într-un moment oarecare aceeași mărime, direcție și sens. În raport cu un sistem de coordonate carteziene cu axa  $Ox$  perpendiculară pe planul unde,  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  conținute în aceste plane depind numai de  $x$  și  $t$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t); \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(x, t). \quad (7.12)$$

În coordonate carteziene divergența și rotorul unui vector  $\mathbf{F}(x,t)$  au următoarele forme particulare:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} \mathbf{u}_x; \quad (7.13)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial F_z}{\partial x} \mathbf{u}_y + \frac{\partial F_y}{\partial x} \mathbf{u}_z. \quad (7.14)$$

Ca urmare, ecuațiile (7.9) devin:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} \mathbf{u}_x = 0; \quad (7.15)$$

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial x} \mathbf{u}_x = 0; \quad (7.16)$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{u}_y + \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{u}_z = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \mathbf{u}_x - \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \mathbf{u}_y - \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \mathbf{u}_z; \quad (7.17)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} \mathbf{u}_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \mathbf{u}_z = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \mathbf{u}_x + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \mathbf{u}_y + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \mathbf{u}_z, \quad (7.18)$$

respectiv:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0; \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0; \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0; \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad (7.22)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}; \quad (7.23)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0; \quad (7.24)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}; \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (7.26)$$

Din relațiile (7.19) și (7.24) rezultă  $E_x(x,t) = \text{const.}$  Similar, din (7.20) și (7.21) se obține  $H_x(x,t) = \text{const.}$  Deci componentele  $E_x$  și  $H_x$  reprezintă o distribuție statică uniformă și nu influențează propagarea câmpului electromagnetic. Deci, ele pot fi considerate nule. Se observă, de asemenea, că celelalte componente sunt legate două câte două:  $E_y$  cu  $H_z$  (relațiile 7.23 și 7.25) și  $E_z$  cu  $H_y$  (relațiile 7.22 și 7.26).

Componentele  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_y$  și  $H_z$  satisfac ecuații de tip hiperbolic. Într-adevăr, derivând relația (7.22) în raport cu  $x$  și relația (7.26) în raport cu  $t$ , rezultă:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial x}; \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}, \quad (7.27)$$

respectiv,

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}. \quad (7.28)$$

Similar, se obțin ecuațiile:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}; \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (7.31)$$

următoare:

Cu notația

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}; \quad n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}, \quad (7.32)$$

unde  $c$  este viteza luminii în vid, iar  $n$  indicele de refracție, ecuațiile (7.28 – 7.31) sunt de forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial (vt)^2}, \quad (7.33)$$

unde funcția  $f(x,t)$  este  $E_y(x,t)$ ,  $E_z(x,t)$ ,  $H_y(x,t)$ ,  $H_z(x,t)$ .

Se demonstrează că soluția generală a ecuației (7.33) este de forma

$$f(x, t) = f_d(x - vt) + f_i(x + vt), \quad (7.34)$$

unde  $f_d$  și  $f_i$  sunt funcții arbitrare care depind de  $x$  și de  $t$  prin intermediul combinațiilor liniare și omogene ale acestora,

$$\xi_d = x - vt, \quad (7.35)$$

respectiv

$$\xi_i = x + vt. \quad (7.36)$$

Dacă în membrul al doilea al relației (7.35) se scade  $dx$  și se adună  $vdt$ , încât variabila  $\xi_d$  rămâne neschimbată,

$$\xi_d = x - vt = x - dx - vt + vdt = (x - dx) - v(t - dt), \quad (7.37)$$

funcția  $f_d$  are aceeași valoare,

$$f_d(x - vt) = f_d[(x - dx) - v(t - dt)]. \quad (7.38)$$

Din identitatea (7.38) rezultă că soluția  $f_d$  depinde de variabilele  $x$  și  $t$  astfel că valoarea ei la distanța  $x$  și la momentul  $t$  este egală cu valoarea pe care a avut-o la momentul anterior  $t - dt$ , la distanța  $x - dx$ . Prin urmare, din relația (7.37) scrisă sub forma,

$$x - vt = x - dx - vt + vdt \quad (7.39)$$

rezultă valoarea constantei  $v$ ,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (7.40)$$

Curba funcției  $f_d$ , unde  $f_d(x,t)$  este  $E_{yd}(x,t)$ ,  $E_{zd}(x,t)$ ,  $H_{yd}(x,t)$ ,  $H_{zd}(x,t)$ , se deplasează neschimbată în lungul axei  $Ox$  cu viteza  $v$ . Pentru un observator care s-ar deplasa cu viteza  $v$  în sensul lui  $x$  crescător, aceste componente apar repartizate invariabil în spațiu. Componentele de argument  $\xi_d$  se propagă în sensul crescător al axei  $Ox$  descriind propagarea câmpului electromagnetic în sens direct și alcătuiesc

unda electromagnetică directă sau incidentă (fig.7.1, a). Sensul vitezei  $\mathbf{v}$  după semi-axa pozitivă  $Ox$  este *sensul de propagare al undei*.

Similar, pentru componentele funcții de argumentul  $\xi_i = x + vt$ , se obține:

$$x + dx + v(t + dt) = x + vt, \quad (7.41)$$

respectiv,

$$\mathbf{v} = -\frac{dx}{dt}. \quad (7.42)$$

Rezultă că aceste componente sunt unde care se propagă cu viteza  $-\mathbf{v}$ , în sensul lui  $x$  descrescător (fig. 7.1, b) și alcătuiesc *unda electromagnetică inversă sau reflectată*.

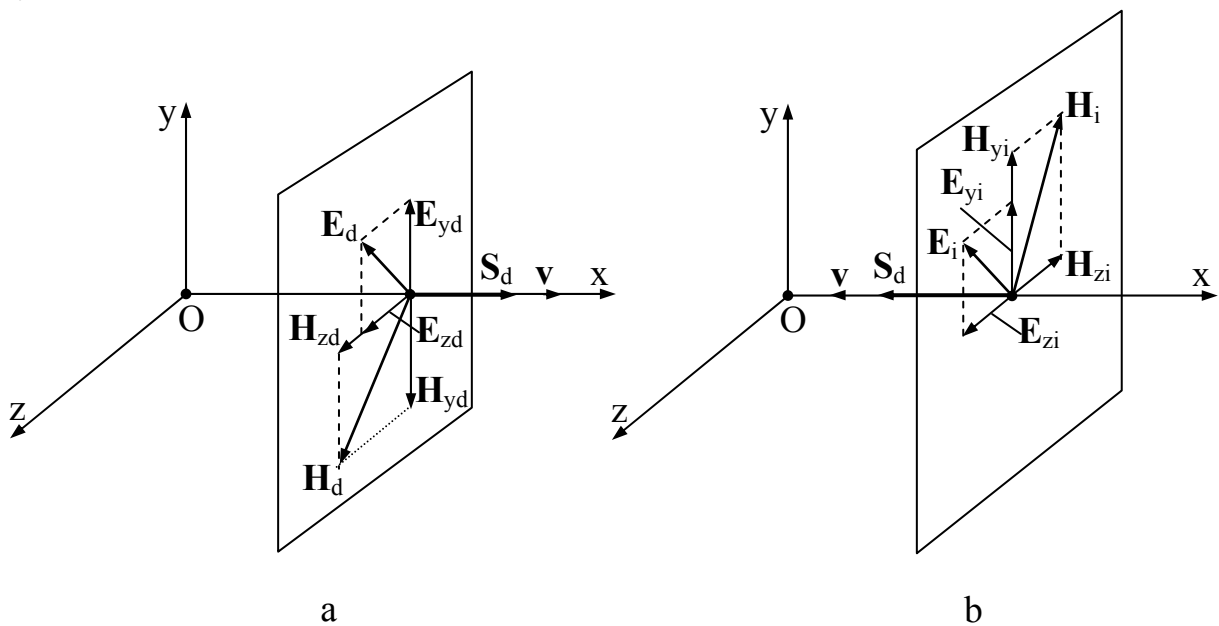


Fig. 7.1

Deci, soluția  $E(x,t)$  are forma următoare:

$$\mathbf{E}(x, t) = [E_{yd}(x - vt) + E_{yi}(x + vt)]\mathbf{u}_y + [E_{zd}(x - vt) + E_{zi}(x + vt)]\mathbf{u}_z. \quad (7.43)$$

Pentru determinarea intensității câmpului magnetic se utilizează ecuațiile de ordinul unu. Din ecuația (7.22) se obține:

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{1}{\mu} \int \frac{\partial E_z}{\partial x} dt = \frac{1}{\mu} \int \left( \frac{\partial E_{zd}}{\partial \xi_d} \frac{\partial \xi_d}{\partial x} + \frac{\partial E_{zi}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \right) dt = \frac{1}{\mu} \int \left( \frac{\partial E_{zd}}{\partial \xi_d} + \frac{\partial E_{zi}}{\partial \xi_i} \right) dt = \\ &= \frac{1}{\mu} \int \left[ \frac{\partial E_{zd}}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi_d}{\partial t} \right)^{-1} + \frac{\partial E_{zi}}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right)^{-1} \right] dt = \frac{1}{\mu} \int \left( -\frac{1}{v} \frac{\partial E_{zd}}{\partial t} + \frac{1}{v} \frac{\partial E_{zi}}{\partial t} \right) dt = \\ &= \frac{1}{\mu v} [-E_{zd}(\xi_d) + E_{zi}(\xi_i)] = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [-E_{zd}(\xi_d) + E_{zi}(\xi_i)]. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Similar, din ecuația (7.23) se obține:

$$\begin{aligned}
 H_z &= -\frac{1}{\mu} \int \frac{\partial E_y}{\partial x} dt = -\frac{1}{\mu} \int \left( \frac{\partial E_{yd}}{\partial \xi_d} \frac{\partial \xi_d}{\partial x} + \frac{\partial E_{yi}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \right) dt = -\frac{1}{\mu} \int \left( \frac{\partial E_{yd}}{\partial \xi_d} + \frac{\partial E_{yi}}{\partial \xi_i} \right) dt = \\
 &= -\frac{1}{\mu} \int \left[ \frac{\partial E_{yd}}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi_d}{\partial t} \right)^{-1} + \frac{\partial E_{yi}}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right)^{-1} \right] dt = -\frac{1}{\mu} \int \left( -\frac{1}{v} \frac{\partial E_{yd}}{\partial t} + \frac{1}{v} \frac{\partial E_{yi}}{\partial t} \right) dt = \\
 &= \frac{1}{\mu v} [E_{yd}(\xi_d) - E_{yi}(\xi_i)] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [E_{yd}(\xi_d) - E_{yi}(\xi_i)]. \quad (7.45)
 \end{aligned}$$

Din relațiile (7.44) și (7.45), rezultă:

$$\mathbf{H}(x, t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left\{ [-E_{zd}(x - vt) + E_{zi}(x + vt)] \mathbf{u}_y + [E_{yd}(x - vt) - E_{yi}(x + vt)] \mathbf{u}_z \right\}. \quad (7.46)$$

Între perechile de componente, funcții de argumentele  $\xi_d$  și  $\xi_i$  există relațiile:

$$H_{yd} = -E_{zd} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = -\frac{E_{zd}}{Z_0}; \quad H_{yi} = E_{zi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{E_{zi}}{Z_0}; \quad (7.47)$$

$$H_{zd} = E_{yd} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{E_{yd}}{Z_0}; \quad H_{zi} = -E_{yi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = -\frac{E_{yi}}{Z_0}, \quad (7.48)$$

Mărimea  $E$  poate fi considerată ca o tensiune raportată la unitatea de lungime, iar mărimea  $H$  ca un curent raportat la unitatea de lungime. Prin urmare, raportul

$$\frac{E_{zd}}{H_{yd}} = \frac{E_{zi}}{H_{yi}} = \frac{E_{yd}}{H_{zd}} = \frac{E_{yi}}{H_{zi}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0 \quad (7.49)$$

are dimensiunea unei impedanțe și se numește *impedanță de undă* a mediului în care se propagă unda electromagnetică.

$$\text{În cazul propagării undei în vid, } Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{36\pi \cdot 10^9}} = 377 \Omega$$

Intensitățile câmpurilor electric și magnetic fiind normale pe direcția de propagare, unda electromagnetică este de tip *transversal*. În vid și practic și în aer, viteza de propagare a undelor electromagnetice este egală cu viteza luminii în vid  $c$ :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} . \quad (7.50)$$

Transportul de energie al undelor electromagnetice se poate stabili calculând vectorul Poynting. Pentru unda directă se obține :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_d &= \mathbf{E}_d \times \mathbf{H}_d = (\mathbf{E}_{yd} \mathbf{u}_y + \mathbf{E}_{zd} \mathbf{u}_z) \times (\mathbf{H}_{yd} \mathbf{u}_y + \mathbf{H}_{zd} \mathbf{u}_z) = (\mathbf{E}_{yd} \mathbf{H}_{zd} - \mathbf{E}_{zd} \mathbf{H}_{yd}) \mathbf{u}_x = \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\mathbf{E}_{yd}^2 + \mathbf{E}_{zd}^2) \mathbf{u}_x = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\mathbf{H}_{yd}^2 + \mathbf{H}_{zd}^2) \mathbf{u}_x. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Deoarece  $\epsilon(\mathbf{E}_{yd}^2 + \mathbf{E}_{zd}^2) = 2w_{ed}$  și  $\mu(\mathbf{H}_{yd}^2 + \mathbf{H}_{zd}^2) = 2w_{md}$ , unde  $w_{ed}$  respectiv  $w_{md}$  sunt densitățile de volum ale energiilor electrică și magnetică, rezultă:

$$\mathbf{S}_d = 2 \mathbf{v} w_{ed} = 2 \mathbf{v} w_{md}. \quad (7.52)$$

Similar, componentelor inverse de câmp le corespunde vectorul Poynting:

$$\mathbf{S}_i = -2 \mathbf{v} w_{ei} = -2 \mathbf{v} w_{mi}, \quad (7.53)$$

unde  $w_{ei} = \epsilon(\mathbf{E}_{yi}^2 + \mathbf{E}_{zi}^2)/2$  și  $w_{mi} = \mu(\mathbf{H}_{yi}^2 + \mathbf{H}_{zi}^2)/2$  sunt densitățile de volum ale energiilor electrică și magnetică.

Din relațiile (7.52) și (7.53) rezultă că transportul de energie electromagnetică are loc de-a lungul axei Ox, în sensul pozitiv pentru unda directă și în sens negativ pentru unda inversă. De aici se poate trage concluzia că axa Ox este direcția de propagare a undei plane considerate.

### 7.2.2. Polarizarea undei electromagnetice plane

Dacă componentele intensităților câmpului electric și magnetic sunt funcții sinusoidale de timp, se poate utiliza reprezentarea simbolică în complex. Ecuației (7.33)

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial t^2} \quad (7.54)$$

îi corespunde forma în complex

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{f}, \quad (7.55)$$

unde  $\underline{\gamma}^2 = -\omega^2 \epsilon \mu$ ;  $\underline{\gamma} = j\omega \sqrt{\epsilon \mu}$ .

Soluția ecuației (7.55) este:

$$\underline{f} = \underline{A} e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{B} e^{\underline{\gamma}x} = \underline{A} e^{j\phi_A} e^{-j\omega \sqrt{\epsilon \mu} x} + \underline{B} e^{j\phi_B} e^{j\omega \sqrt{\epsilon \mu} x}. \quad (7.56)$$

Utilizând relația (6.38) se determină funcția original:

$$f(x, t) = \text{Im} \left\{ \sqrt{2} \underline{f} e^{j\omega t} \right\} =$$



$$= A_m \sin(\omega t - \omega\sqrt{\varepsilon\mu} x + \varphi_A) + B_m \sin(\omega t + \omega\sqrt{\varepsilon\mu} x + \varphi_B), \quad (7.57)$$

sau

$$f(x, t) = A_m \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_A\right] + B_m \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \varphi_B\right], \quad (7.58)$$

unde termenii de forma

$$f_d(x, t) = A_m \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_A\right] \quad (7.59)$$

reprezintă unda directă, iar

$$f_i(x, t) = B_m \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \varphi_B\right], \quad (7.60)$$

unda inversă.

Dacă componentele în planul undeii a oricăreia dintre intensitățile câmpurilor electric și magnetic sunt sinusoidale de pulsație  $\omega$  în raport cu argumentele (7.59) și (7.60), unda electromagnetică se numește *armonică* sau *monocromatică*. Locul geometric al vârfului vectorului câmp electric sau magnetic este o elice a cărei urmă în planul undeii este o curbă numită *curbă de polarizare*. După forma curbei de polarizare, unda electromagnetică se numește *polarizată liniar, circular, eliptic* etc. Deoarece în planul undeii, vectorii câmp electric și magnetic sunt perpendiculari unul pe celălalt, este suficient să se studieze polarizarea numai a uneia dintre intensitățile câmpurilor.

Alegând direcția de polarizare după axa Ox, componentele directe  $E_y(x, t)$  și  $E_z(x, t)$  ale intensității câmpului electric au expresiile (v. relațiile 7.59 și 7.60):

$$E_y(x, t) = E_{y\max} \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_y\right]; \quad E_z(x, t) = E_{z\max} \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_z\right]. \quad (7.61)$$

În planul  $x = 0$ , relațiile (7.61) devin:

$$E_y(0, t) = E_y = E_{y\max} \sin(\omega t + \varphi_y); \quad E_z(0, t) = E_z = E_{z\max} \sin(\omega t + \varphi_z). \quad (7.62)$$

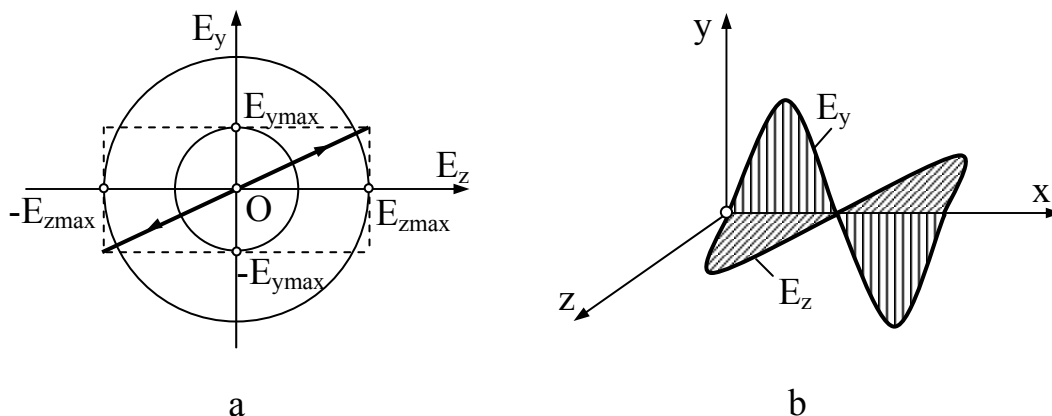


Fig. 7.2

Dacă  $\varphi_y = \varphi_z + 2k\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , se obține ecuația:

$$\frac{E_y}{E_z} = \frac{E_{y\max}}{E_{z\max}}, \quad (7.63)$$

care reprezintă în planul  $E_y, E_z$  o dreaptă situată în cadranele I și III (fig. 7.2, a). Unda electromagnetică este polarizată *liniar*, iar în spațiu câmpul electric este situat în planul care trece prin axa  $Ox$  (fig. 7.2, b).

Dacă  $\varphi_y = \varphi_z + 2\pi(k + 1)$ , se obține ecuația:

$$\frac{E_y}{E_z} = -\frac{E_{y\max}}{E_{z\max}} \quad (7.64)$$

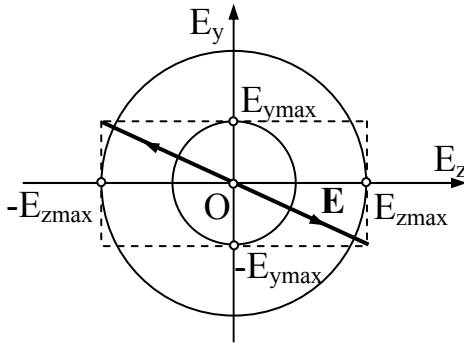


Fig. 7.3

care reprezintă o dreaptă în cadranele II, IV și unda este polarizată de asemenea liniar (fig. 7.3). Dacă  $E_{y\max} = E_{z\max} = E_{\max}$  și  $\varphi_y = \varphi_z \pm (2k + 1)\frac{\pi}{2}$  se deduce din relația (7.62) ecuația unui cerc de rază  $E_{\max}$ :

$$E_y^2 + E_z^2 = E_{\max}^2 \quad (7.65)$$

și curba de polarizare este circulară (fig. 7.4). Unda electromagnetică este polarizată *circular*, iar în spațiu vârful vectorului  $\mathbf{E}$  descrie o elice circulară.

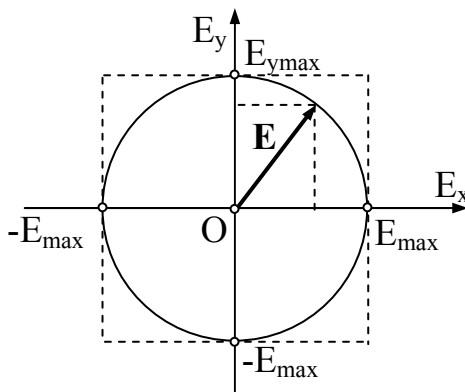


Fig. 7.4

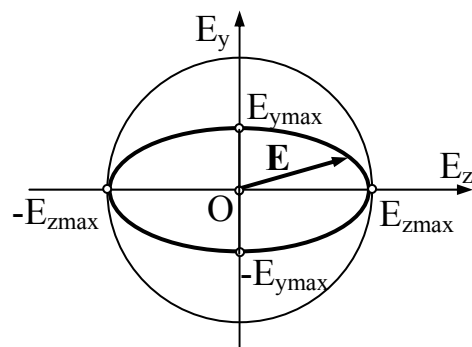


Fig. 7.5

Dacă  $E_{y\max} \neq E_{z\max}$  și  $\varphi_y = \varphi_z \pm (2k + 1)\frac{\pi}{2}$  se obține din relația (7.62) ecuația unei elipse de semiaxe  $E_{y\max}$  și  $E_{z\max}$  (fig. 7.5):

$$\frac{E_y^2}{E_{y\max}^2} + \frac{E_z^2}{E_{z\max}^2} = 1 \quad (7.66)$$

și unda electromagnetică este polarizată *eliptic*.

### 7.2.3. Unda electromagnetică plană în dielectrice conductivi

Într-un mediu liniar, izotrop și omogen de conductivitate  $\sigma$ , permitivitate  $\varepsilon$  și permeabilitate  $\mu$ , intensitatea câmpului electric  $E(x,t)$  a unei unde plane care se propagă după axa  $Ox$  satisface ecuația (7.6) în care  $\rho_v = 0$ :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (7.67)$$

Ecuatiei (7.67) îi corespunde forma în complex:

$$\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial x^2} = (j\omega\mu\sigma - \omega^2\varepsilon\mu)\underline{E} = \underline{\gamma}^2 \underline{E}, \quad (7.68)$$

unde:

$$\underline{\gamma}^2 = j\omega\mu\sigma - \omega^2\varepsilon\mu; \quad \underline{\gamma} = \alpha + j\beta; \quad (7.69)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} - 1 \right)}; \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} + 1 \right)}. \quad (7.70)$$

În relațiile (7.69) și (7.70)  $\underline{\gamma}$  este *constantă de propagare*,  $\alpha$  - *constantă de atenuare*, iar  $\beta$  - *constantă de fază*.

Soluția ecuației (7.68) este de forma:

$$\underline{E} = \underline{M}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{M}_2 e^{\underline{\gamma}x} = M_1 e^{-\alpha x} e^{-j(\beta x - \varphi_1)} + M_2 e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \varphi_2)}. \quad (7.71)$$

Utilizând relația (6.38) se determină funcția original:

$$E(x,t) = \sqrt{2} M_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \varphi_1) + \sqrt{2} M_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \varphi_2). \quad (7.72)$$

Fiecare termen din expresiile (7.72) conține câte doi factori, unul descrescător, respectiv crescător în raport cu distanța  $x$ , după câte o exponențială, care pune în evidență atenuarea valorilor maxime, și un al doilea factor, o funcție sinusoidală de  $x$  și  $t$ , care pune în evidență propagarea câmpului. Pentru a determina viteza de propagare se impune condiția ca faza să fie aceeași în momentele  $t$  și  $t + dt$ :

$$\omega t \mp \beta x + \varphi = \omega(t + dt) \mp \beta(x + dx) + \varphi, \quad (7.73)$$

unde s-a ținut seama că în intervalul  $dt$  unda se propagă cu  $dx$ . Rezultă:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} + 1}}. \quad (7.74)$$

unde s-a utilizat relația (7.70).

Așadar, în fiecare punct din spațiu, intensitatea câmpului electric rezultă din suprapunerea a câte două unde amortizate, care se propagă în sensuri opuse cu aceeași viteză:

$$E = E_d + E_i, \quad (7.75)$$

În relațiile (7.76),

$$E_d = \sqrt{2} M_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \varphi_1) = \sqrt{2} M_1 e^{-\alpha x} \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_1\right]; \quad (7.76)$$

$$E_i = \sqrt{2} M_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \varphi_2) = \sqrt{2} M_2 e^{\alpha x} \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \varphi_2\right] \quad (7.77)$$

reprezintă undele directă și inversă. Se mai întrebuițează termenii de undă *incidentă* pentru unda directă și undă *reflectată* pentru cea inversă.

În figura 7.6, a este reprezentată repartiția de-a lungul axei Ox a undelor directe a intensității câmpului electric în momentele  $t_1$  și  $t_2 = t_1 + \Delta t$ :

$$E_d(x, t_1) = \sqrt{2} M_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t_1 - \beta x + \varphi_1); \quad (7.78)$$

$$E_d(x, t_2) = \sqrt{2} M_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t_2 - \beta x + \varphi_1). \quad (7.79)$$

În momentul  $t_1$ ,  $E_d(x, t_1)$  se anulează în punctele  $x_1, x_2, x_3 \dots$  în care

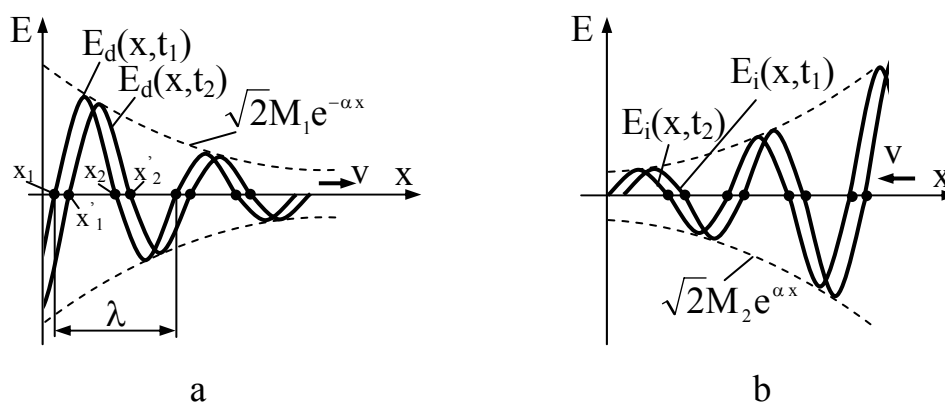


Fig. 7.6

$$\omega t_1 - \beta x + \mu_1 = \pi k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (7.80)$$

iar în momentul  $t_2$  se anulează în punctele  $x'_1, x'_2, x'_3 \dots$  în care

$$\omega t_2 - \beta x + \mu_1 = \pi k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (7.81)$$

Deoarece  $t_2 > t_1$ , rezultă din diferența expresiilor (7.80) și (7.81) că  $x'_1 > x_1$ ,  $x'_2 > x_2, \dots$ . Prin urmare,  $E_d$  reprezintă o undă amortizată care în intervalul de timp  $t = t_2 - t_1$  se deplasează cu distanța  $x = x'_1 - x_1 = x'_2 - x_2, \dots$  în direcția valorilor crescătoare ale lui  $x$ . Datorită acestui fapt,  $E_d$  poartă denumirea de *undă directă*.

În figura 7.6, b este reprezentată repartiția de-a lungul axei Ox a undelor inverse a intensității câmpului electric, de asemenea în momentele  $t_1$  și  $t_2$ .

Distanța parcursă de unda electromagnetică în cursul unei perioade  $T$  a oscilației se numește lungime de undă  $\lambda$ ,

$$\lambda = vT. \quad (7.82)$$

Diferența dintre fazele oscilațiilor în două puncte la distanța  $\lambda$  unul de altul, în sensul propagării undei, are valoarea  $\frac{\omega}{v}\lambda = \omega T = 2\pi$ . Prin urmare, lungimea de undă este distanța dintre două valori maxime pozitive consecutive ale intensității câmpului.

Din relațiile (7.78), (7.79) și (7.70) rezultă că amplitudinea intensității câmpului electric este atenuată în raport cu  $x$  în sensul de propagare și atenuarea  $\alpha$  scade cu frecvența. Dielectricii conductivi absorb undele electromagnetice fiind opaci, spre deosebire de dielectricii perfecți care sunt transparenti. Deoarece viteza de propagare depinde de frecvență, dielectricii conductivi sunt *medii dispersive*. La frecvențe înalte, sau la valori mici ale conductivității, se poate considera

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}} \approx 1 + \frac{\sigma^2}{2\varepsilon^2 \omega^2}$$

și rezultă aproximațiile:

$$\alpha \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}; \quad v \cong \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu} \frac{2}{2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}}} \cong \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (7.83)$$

La frecvențe joase,  $\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}} \approx \frac{\sigma}{\varepsilon \omega}$  și deci:

$$\alpha \cong \sqrt{\frac{\mu \omega \sigma}{2}} \quad (7.84)$$

Această expresie a lui  $\alpha$  coincide cu relația  $\frac{1}{\delta}$ ,  $\delta$  fiind adâncimea de pătrundere a câmpului electromagnetic în semispațiul conductor, în ipoteza regimului cvasistaționar (v. par.6.3).

În aproximația (7.83) predomină efectul de propagare a câmpului electromagnetic, iar în aproximația (7.84) predomină efectul de difuzie.

### 7.3. RADIAȚIA ELECTROMAGNETICĂ

În paragraful 7.2 s-a studiat câmpul electromagnetic nestaționar care se propagă sub formă de unde electromagnetice la distanțe foarte mari de surse. Fenomenul producerii de către surse a câmpului electromagnetic este numit *radiație electromagnetică*.

#### 7.3.1. Potențiale electrodinamice întârziate

Ca și în cazul câmpurilor staționare și cvasistaționare, prin introducerea funcțiilor auxiliare potențial electrodinamic vector  $\mathbf{A}_e$  și potențial electrodinamic scalar  $V_e$ , ecuațiile câmpului electromagnetic nestaționar se reduc ca număr și se pot integra mai simplu. Relația de definiție a potențialului electrodinamic vector  $\mathbf{A}_e$  (5.51),

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}_e \quad (7.85)$$

determină numai partea solenoidală  $\mathbf{A}_{es}$  a acestuia, rotorul părții potențiale  $\mathbf{A}_{ep}$  fiind identic nul ( $\text{rot}\mathbf{A}_{ep} = 0$ ). În mediile liniare și imobile, legea circuitului magnetic se poate scrie sub forma:

$$\text{rot rot}\mathbf{A}_e = \mu\mathbf{J} + \mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mu\mathbf{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (7.86)$$

Ținând seama de relația  $\text{rot rot}\mathbf{A}_e = \text{grad div}\mathbf{A}_e - \Delta\mathbf{A}_e$  și utilizând ecuația legii inducției electromagnetice în funcție de potențialele electrodinamice (5.81),

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} - \text{grad } V_e, \quad (7.87)$$

relația (7.86) devine:

$$\text{grad div}\mathbf{A}_e - \Delta\mathbf{A}_e = \mu\mathbf{J} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}_e}{\partial t^2} - \mu\varepsilon \text{grad} \frac{\partial V_e}{\partial t}, \quad (7.88)$$

sau:

$$\Delta\mathbf{A}_e - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}_e}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} + \text{grad} \left( \text{div}\mathbf{A}_e + \mu\varepsilon \frac{\partial V_e}{\partial t} \right). \quad (7.89)$$

Dacă este satisfăcută relația

$$\text{div } \mathbf{A}_e + \mu\varepsilon \frac{\partial V_e}{\partial t} = 0, \quad (7.90)$$

numită *condiție de etalonare a lui Lorentz*, ecuația (7.89) devine:

$$\Delta \mathbf{A}_e - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}_e}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (7.91)$$

și are forma ecuației vectoriale neomogene a undelor.

Luând divergența ambilor membri ai ecuației (7.87) și ținând seama de condiția de etalonare a lui Lorentz (7.90), rezultă:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} - \operatorname{div} \operatorname{grad} V_e = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{A}_e) - \Delta V_e = \mu\epsilon \frac{\partial^2 V_e}{\partial t^2} - \Delta V_e. \quad (7.92)$$

Pe de altă parte,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\rho_v}{\epsilon}. \quad (7.93)$$

Din relațiile (7.92) și (7.93) se obține ecuația scalară neomogenă a undelor pentru potențialul electrodinamic scalar  $V_e$ :

$$\Delta V_e - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V_e}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}. \quad (7.94)$$

Prin urmare, potențialele electrodinamice  $\mathbf{A}_e$  și  $V_e$  satisfac ecuații de tip d'Alembert.

În domeniul în care nu există sarcini electrice libere ( $\rho_v = 0$ ) și nici curenți de conducție ( $\mathbf{J} = 0$ ), ecuațiile (7.91) și (7.94) devin:

$$\Delta \mathbf{A}_e = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}_e}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_e}{\partial t^2}; \quad \Delta V_e = \mu\epsilon \frac{\partial^2 V_e}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V_e}{\partial t^2} \quad (7.95)$$

și au forma ecuației undei. În ecuațiile (7.95),  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ .

Presupunem că într-un domeniu  $v_\Sigma$  se află sarcina electrică variabilă în timp și repartizată cu densitatea de volum  $\rho_v$  (fig. 7.7). Conform teoremei superpoziției, se poate calcula potențialul  $V_e$  într-un punct  $P$  ca o suprapunere a potențialelor elementare  $dV_e$  produse de sarcinile elementare  $dq = \rho_v dv$  conținute în elementele de volum  $dv$ . În exteriorul domeniului  $v_\Sigma$ ,  $\rho_v = 0$  și potențialul elementar  $dV_e$  satisface ecuația (7.95<sub>2</sub>), care în coordonate polare devine:

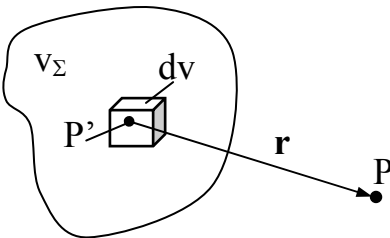


Fig. 7.7

$$\frac{\partial^2 (dV_e)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial (dV_e)}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (dV_e)}{\partial t^2}. \quad (7.96)$$

Înmulțind ecuația (7.96) cu  $r$ , se obține:

$$r \frac{\partial^2 (dV_e)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial (dV_e)}{\partial r} = \frac{r}{v^2} \frac{\partial^2 (dV_e)}{\partial t^2}, \quad (7.97)$$

sau

$$\frac{\partial^2(r dV_e)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2(r dV_e)}{\partial t^2}. \quad (7.98)$$

Ecuția (7.98) este analoagă cu ecuația (7.33) și prin analogie cu soluția (7.34) se obține soluția ecuației (7.98):

$$r dV_e = f_d(r - vt) + f_i(r + vt). \quad (7.99)$$

Dacă se consideră domeniul infinit extins, atunci se reține numai primul termen, corespunzător undei directe care se propagă din punctul P și rezultă:

$$dV_e = \frac{f_d(r - vt)}{r} = \frac{f_d\left[-v\left(t - \frac{r}{v}\right)\right]}{r} = \frac{g_d\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}. \quad (7.100)$$

Deoarece în cazul particular al sarcinii invariabile în timp, potențialul elementar în punctul P are expresia cunoscută (2.134),

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho_v dv}{r}, \quad (7.101)$$

rezultă:

$$dV_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho_v\left(t - \frac{r}{v}\right) dv}{r}. \quad (7.102)$$

Prin suprapunerea potențialelor elementare  $dV_e$  produse de sarcinile elementare  $dq = \rho_v dv$  conținute în elementele de volum  $dv$ , se obține potențialul  $V_e$  în punctul P:

$$V_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{v_\Sigma} \frac{\rho_v\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} dv. \quad (7.103)$$

În mod analog se obține soluția ecuației (7.95<sub>1</sub>), similară cu soluția (4.298) a ecuației (4.294):

$$\mathbf{A}_e = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{v_\Sigma} \frac{\mathbf{J}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} dv. \quad (7.104)$$

Prin urmare, pentru domeniul câmpului ocupând întreg spațiul, soluțiile ecuațiilor (7.95) au expresiile (7.103) și (7.104).



În relația (7.102),  $\rho_v\left(t - \frac{r}{v}\right)$  este valoarea sarcinii în momentul  $\left(t - \frac{r}{v}\right)$ , care precede momentul  $t$  în care se calculează potențialul electrodinamic scalar elementar  $dV_e$  în punctul  $P$ , iar  $\frac{r}{v}$  este intervalul de timp în decursul căruia unda care se propagă cu viteza  $v$  parcurge distanța  $r$ . În mod similar se interpretează și expresia (7.104) a lui  $\mathbf{A}_e$ .

În concluzie, potențialele electrodinamice se stabilesc cu întârziere, aceasta fiind cu atât mai mare cu cât distanța  $r$  dintre punctul în care este situată sursa și punctul în care se calculează potențialul este mai mare. Expresiile (7.103) și (7.104) descriu propagarea câmpului electromagnetic din aproape în aproape în spațiu și timp; din acest motiv  $\mathbf{A}_e$  și  $V_e$  se numesc potențiale electrodinamice întârziate, iar expresiile (7.103) și (7.104) sunt *formulele lui Kirchhoff pentru radiația electromagnetică în spațiul infinit*.

### 7.3.2. Oscilatorul elementar

Undele electromagnetice au fost puse în evidență de Hertz. Oscilatorul lui Hertz se compune din două sfere mari  $S_1$  și  $S_2$  dispuse la extremitățile a două bare metalice având la celelalte extremități câte o mică sferă  $s_1$  și  $s_2$  care constituie eclatorul oscilatorului (fig. 7.8, a). Sferele  $S_1$  și  $S_2$  sunt conectate prin două fire la

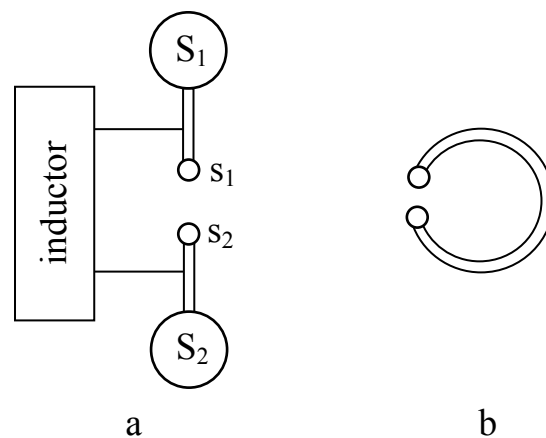


Fig. 7.8

un inductor care încarcă sferele eclatorului  $s_1$  și  $s_2$ , stabilind între acestea o tensiune suficient de mare pentru a produce în eclator o scânteie de descărcare electrică. Curentul care trece prin bare și scânteie în cursul descărcării sarcinilor eclatorului nu încetează când sferele sunt complet descărcate, deoarece ele se încarcă din nou cu sarcini de semne opuse și fenomenul se repetă cu o descărcare în sens opus. Frecvența descărcărilor este stabilită de forma și dimensiunile oscilatorului. Asociind oscilatorului un circuit oscilant având inductivitatea  $L$  egală cu inductivitatea barelor, iar capacitatea  $C$  egală cu capacitatea sferelor  $S_1$  și  $S_2$  conectate în serie, frecvența proprie  $f_0$  a oscilatorului are expresia:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad (7.105)$$

unde  $L$  și  $C$  depind de dimensiunile geometrice ale oscilatorului și de proprietățile electrice și magnetice ale mediului.

La depărtare suficient de mare de oscilator câmpurile electric și magnetic se condiționează reciproc, alcătuind o undă electromagnetică. Câmpul electric este produs de câmpul magnetic variabil în timp și câmpul magnetic este produs de câmpul electric variabil în timp, în conformitate cu ecuațiile lui Maxwell. Pentru a stabili o undă electromagnetică la mare depărtare de oscilator, sunt necesare viteze mari de variație în timp ale câmpurilor electric și magnetic, adică sunt necesare frecvențe mari.

Undele electromagnetice emise de oscilator au fost puse în evidență de Hertz cu ajutorul unui dispozitiv numit *rezonator*. Rezonatorul este compus dintr-un inel metalic întrerupt având la extremități două mici sfere care alcătuiesc eclatorul rezonatorului (fig. 7.8, b). Rezonatorului i se poate asocia un circuit oscilant a cărui inductivitate  $L_r$  este egală cu inductivitatea inelului, iar capacitatea  $C_r$  este egală cu capacitatea condensatorului ale cărui armături sunt sferele rezonatorului. Frecvența de oscilație a rezonatorului

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_r C_r}} \quad (7.106)$$

este egală cu frecvența  $f_0$  a oscilatorului (7.105).

### 7.3.3. Radiația electromagnetică a oscilatorului elementar

Oscilatorul elementar poate fi considerat ca fiind un dipol constituit din

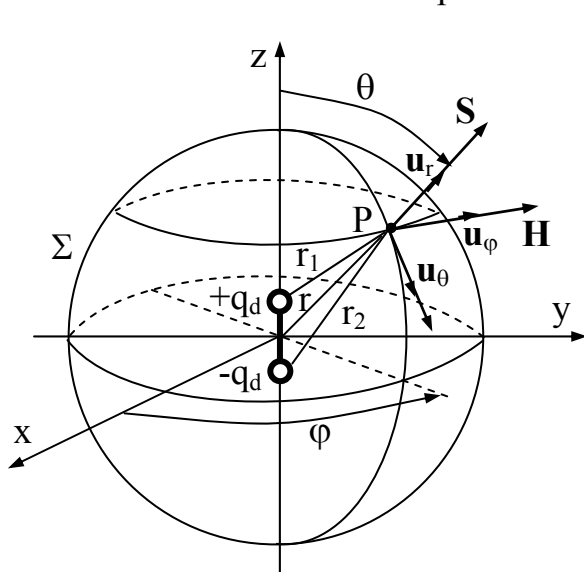


Fig. 7.9

sarcinile dipolare  $+q_d\left(t - \frac{r_1}{v}\right)$  și  $-q_d\left(t - \frac{r_2}{v}\right)$  situate la distanța  $s$ .

Dacă se alege originea sistemului de coordonate în centrul dipolului (fig. 7.9) și axa  $Oz$  în sensul vectorului  $s$ , potențialele electrodinamice  $V_e$  și  $A_e$ , respectiv intensitățile câmpurilor electric  $E$  și magnetic  $H$  depind numai de coordonata radială  $r$  și de coordonata unghiulară  $\theta$ .

Potențialul electrodinamic scalar  $V_e$  stabilit în punctul  $P$  se calculează aplicând principiul superpoziției:

$$V_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{q_d\left(t - \frac{r_1}{v}\right)}{r_1} - \frac{q_d\left(t - \frac{r_2}{v}\right)}{r_2} \right]. \quad (7.107)$$

Dezvoltând în serie termenii relației (7.107) și reținând numai primii doi termeni ai dezvoltării, se obține:

$$\frac{q_d\left(t - \frac{r_1}{v}\right)}{r_1} = \frac{q_d\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} + (r_1 - r) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{q_d\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} \right]; \quad (7.108)$$

$$-\frac{q_d\left(t - \frac{r_2}{v}\right)}{r_2} = -\frac{q_d\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} - (r_2 - r) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{q_d\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} \right]. \quad (7.109)$$

Observând că

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{q_d\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} \right] &= \frac{1}{r} \frac{\partial q_d\left(t - \frac{r}{v}\right)}{\partial r} - \frac{q_d\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r^2} = \\ &= -\frac{1}{vr} \frac{\partial q_d\left(t - \frac{r}{v}\right)}{\partial t} - \frac{q_d\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r^2} = -\frac{1}{vr} \dot{q}_d\left(t - \frac{r}{v}\right) - \frac{q_d\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r^2}, \end{aligned} \quad (7.110)$$

unde s-a utilizat notația  $(\dot{\phantom{x}})$  pentru operatorul de derivare în raport cu timpul, relația (7.107) devine:

$$V_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} (r_1 - r_2) \left[ -\frac{q_d\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r^2} - \frac{\dot{q}_d\left(t - \frac{r}{v}\right)}{vr} \right]. \quad (7.111)$$

Din figura 7.9, rezultă  $r_2 - r_1 = s \cdot \cos \theta = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}{r}$  și introducând în relația (7.111) se obține:

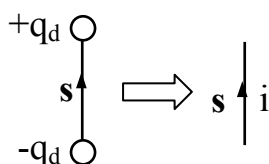
$$\begin{aligned}
V_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{q_d \left( t - \frac{r}{v} \right) \mathbf{s} \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\dot{q}_d \left( t - \frac{r}{v} \right) \mathbf{s} \mathbf{r}}{v r^2} \right] = \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{\mathbf{r} \mathbf{p}_d \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \dot{\mathbf{p}}_d \left( t - \frac{r}{v} \right)}{v r^2} \right], \tag{7.112}
\end{aligned}$$

unde

$$\mathbf{p}_d \left( t - \frac{r}{v} \right) = q_d \left( t - \frac{r}{v} \right) \mathbf{s} \tag{7.113}$$

este momentul electric dipolar.

Variația sarcinilor  $q_d$  și  $-q_d$  se produce datorită unui transport de sarcină între cele două corpuri punctuale. Prin urmare, prin conductorul de legătură de lungime  $s$  apare un curent electric a cărui intensitate este:



$$i = \frac{dq_d}{dt} = \dot{q}_d. \tag{7.114}$$

Fig. 7.10

Multiplicând relația (7.114) cu  $\mathbf{l}$  și ținând seama de relația (7.113), se obține:

$$i \left( t - \frac{r}{v} \right) \mathbf{s} = \dot{\mathbf{p}}_d \left( t - \frac{r}{v} \right). \tag{7.115}$$

Relația (7.115) asociază oscilatorului elementar constituit din sarcinile dipolare  $+q_d$  și  $-q_d$ , de moment electric  $\mathbf{p}_d$ , oscilatorul elementar constituit dintr-un fir de lungime  $\mathbf{l}$ , parcurs de curentul  $i$ , numit *antena liniară elementară* (fig. 7.10). Notând cu  $A$  aria secțiunii transversale a firului și cu  $d\mathbf{l}$  un element de lungime al acestuia (fig. 7.11), potențialul electrodinamic vector  $\mathbf{A}_e$  într-un punct situat la distanța  $r$  de oscilator se calculează cu relația (7.104):

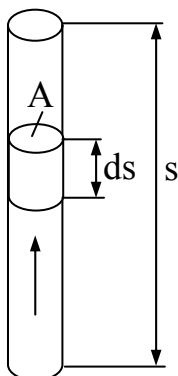


Fig. 7.11

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_e &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{v_\Sigma} \frac{\mathbf{J} \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r} dv = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{v_\Sigma} \frac{\mathbf{J} \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r} (\mathbf{A} d\mathbf{s}) = \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{v_\Sigma} \frac{\mathbf{J} \left( t - \frac{r}{v} \right) \mathbf{A}}{r} d\mathbf{s} = \frac{\mu i \left( t - \frac{r}{v} \right)}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s}}{r} = \frac{\mu i \left( t - \frac{r}{v} \right) \mathbf{s}}{4\pi r} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mu \dot{\mathbf{p}}_d \left( t - \frac{r}{v} \right)}{4\pi r}. \quad (7.116)$$

Componentele vectorului intensitate câmp magnetic  $\mathbf{H}$  se determină din relațiile:

$$H_x = \frac{1}{\mu} \text{rot}_x \mathbf{A}_e; H_y = \frac{1}{\mu} \text{rot}_y \mathbf{A}_e; H_z = \frac{1}{\mu} \text{rot}_z \mathbf{A}_e. \quad (7.117)$$

Deoarece  $A_{ex} = A_{ey} = 0$  și  $A_{ez} = \frac{\mu i s}{4\pi r}$ , rezultă:

$$H_x = \frac{\partial A_{ez}}{\partial y} = \frac{\partial A_{ez}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{s}{4\pi} \left( -\frac{i}{r^2} - \frac{1}{r v} \frac{\partial i}{\partial t} \right) \frac{y}{r}; \quad (7.118)$$

$$H_y = -\frac{\partial A_{ez}}{\partial x} = \frac{\partial A_{ez}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{s}{4\pi} \left( -\frac{i}{r^2} - \frac{1}{r v} \frac{\partial i}{\partial t} \right) \frac{x}{r}; \quad (7.119)$$

$$H_z = 0. \quad (7.120)$$

Deoarece  $\frac{H_x}{H_y} = -\frac{y}{x}$ , vectorul  $\mathbf{H}$  este tangent la cercul care se găsește într-un plan perpendicular pe axa  $Oz$  și al cărui centru este pe această axă (fig. 7.9). Aceste cercuri paralele cu ecuatorul sunt liniile câmpului magnetic. Prin urmare, în coordonate sferice, vectorul  $\mathbf{H}$  are numai componentă tangentă la cercul ecuatorial,  $\mathbf{H} = H_\varphi \mathbf{u}_\varphi$ , unde  $H_\varphi = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}$ . Deoarece  $\sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \theta$  și utilizând relațiile (7.118) și (7.119), se obține:

$$H_\varphi = \frac{s \cdot \sin \theta}{4\pi r v} \left( \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{v}{r} i \right). \quad (7.121)$$

În coordonate sferice, componentele intensității câmpului electric  $E_\varphi$ ,  $E_r$  și  $E_\theta$  se determină utilizând relația (7.87):

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} - \text{grad } V_e. \quad (7.122)$$

Deoarece  $A_{e\varphi} = 0$ ,  $A_{er} = A_{ez} \cos \theta$ ,  $A_{e\theta} = -A_{ez} \sin \theta$  și ținând seama de relația (7.112) care se poate scrie sub forma:

$$V_e = \frac{s \cdot \cos \theta}{4\pi \varepsilon} \left[ \frac{q_d}{r^2} + \frac{i}{v r} \right], \quad (7.123)$$

rezultă:

$$E_{\varphi} = 0; \quad (7.124)$$

$$E_r = -\frac{\partial A_{er}}{\partial t} - \frac{\partial V_e}{\partial r} = \frac{2\mu s \cos \theta}{4\pi r} \left( \frac{v}{r} \dot{i} + \frac{v^2}{r^2} q_d \right); \quad (7.125)$$

$$E_{\theta} = -\frac{\partial A_{e\theta}}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_e}{\partial \varphi} = \frac{\mu s \sin \theta}{4\pi r} \left( \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{v}{r} \dot{i} + \frac{v^2}{r^2} q_d \right). \quad (7.126)$$

La valori mici ale lui  $r$  (în vecinătatea oscilatorului) în expresiile lui  $B_{\varphi}$ ,  $E_r$  și  $E_{\theta}$  predomină ultimii termeni, astfel încât se pot face următoarele aproximări:

$$\mathbf{H} = \frac{i s \sin \theta}{4\pi r^2} \mathbf{u}_{\varphi} = \frac{i}{4\pi} \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}; \quad (7.127)$$

$$E_r = \frac{2s q_d \cos \theta}{4\pi \epsilon r^3}; \quad (7.128)$$

$$E_{\theta} = \frac{s q_d \sin \theta}{4\pi \epsilon r^3}, \quad (7.129)$$

unde s-a ținut seama de relația  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ .

Se observă că relația aproximativă a lui  $\mathbf{H}$  coincide cu relația lui Biot – Savart – Laplace (4.35) valabilă în regimurile staționar și cvasistaționar, iar relațiile aproximative pentru componentele intensității câmpului electric coincid cu componentele intensității câmpului electric produs de un dipol electric elementar în regim electrostatic (2.55 a). Zona din vecinătatea oscilatorului în care inducția magnetică și intensitatea câmpului electric se aproximează cu relațiile (7.127 – 7.129), se numește *zona inducției*.

La distanțe foarte mari de oscilator, în expresiile lui  $H_{\varphi}$  și  $E_{\theta}$  predomină primii termeni, iar componenta  $E_r$  poate fi neglijată, deoarece ambii săi termeni sunt mult mai mici decât primul termen al componentei  $E_{\theta}$ . Prin urmare, la distanțe foarte mari de oscilator, pentru intensitățile câmpurilor magnetic  $\mathbf{H}$  și electric  $\mathbf{E}$  se pot utiliza următoarele relații aproximative:

$$\mathbf{H} = H_{\varphi} \mathbf{u}_{\varphi} = \frac{s \cdot \sin \theta}{4\pi r v} \frac{\partial i}{\partial t} \mathbf{u}_{\varphi}; \quad \mathbf{E} = E_{\theta} \mathbf{u}_{\theta} = \frac{\mu \cdot s \cdot \sin \theta}{4\pi r} \frac{\partial i}{\partial t} \mathbf{u}_{\theta}. \quad (7.130)$$

Dacă se multiplică scalar ambii termeni ai lui  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  cu  $\mathbf{r}$  se obține  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = 0$ ,  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{r} = 0$ , deci  $\mathbf{E} \perp \mathbf{r}$  și  $\mathbf{H} \perp \mathbf{r}$ , iar dacă se multiplică vectorial la dreapta  $\mathbf{H}$  cu  $\mathbf{r}$  se obține  $\mathbf{H} \times \mathbf{r} = \frac{\epsilon v}{r} \mathbf{E}$ ; prin urmare, vectorii  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  și  $\mathbf{r}$  formează un triedru drept.

Vectorul lui Poynting  $\mathbf{S}$  se obține utilizând relațiile (7.130):

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{H^2}{\epsilon v} \mathbf{u}_r. \quad (7.131)$$

Vectorul  $\mathbf{S}$  este orientat de-a lungul razei  $\mathbf{r}$  în sensul de la dipol; prin urmare, energia se transmite în direcția razelor ce pleacă de la dipol. Această energie nu se mai întoarce înapoi la sursă și reprezintă energia câmpului electromagnetic radiat.

La foarte mare depărtare de oscilator, câmpul electromagnetic se propagă ca o undă plană și din acest motiv zona îndepărtată de oscilator se numește *zona undelor*. Liniile câmpului electric  $\mathbf{E}$  sunt cercuri meridiane, iar cele ale lui  $\mathbf{H}$  sunt cercuri paralele cu ecuatorul (fig. 7.9). Într-un sistem de coordonate sferice cu centrul în oscilator și axa Oz în lungul axei dipolului, câmpul electric are numai componentă tangență la cercul meridian și câmpul magnetic are numai componentă tangență la cercul ecuatorial. Se regăsesc toate proprietățile unei electromagnetice plane (transversalitate, energia electromagnetică împărțită în părți egale între energia electrică și magnetică).

Introducând expresia lui  $H$  (7.130) în relația (7.131) se obține:

$$S = \frac{\mu s^2 \sin^2 \theta}{16 \pi^2 r^2 v} \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right)^2. \quad (7.132)$$

Deoarece  $s \frac{\partial i}{\partial t} = \ddot{p}_d$  (v. relația 7.115), relația (7.132) se poate scrie sub forma:

$$S = \frac{\mu \sin^2 \theta}{16 \pi^2 r^2 v} \ddot{p}_d^2. \quad (7.133)$$

Puterea instantanee  $p(t)$  radiată prin sfera de rază  $r$  este:

$$p(t) = \iint_{\Sigma} S \, dA = \frac{\mu \ddot{p}_d^2}{16 \pi^2 v_0} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^2} 2\pi r^2 \sin \theta \, d\theta = \frac{\mu \ddot{p}_d^2}{8 \pi v_0} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{\mu \ddot{p}_d^2}{6 \pi v}. \quad (7.134)$$

Se observă că puterea instantanee  $p(t)$  nu depinde de distanța  $r$ .

Dacă unda electromagnetică este monocromatică de pulsație  $\omega$  în raport cu argumentul  $t - r/v$  și deci curentul este sinusoidal în timp,  $i(t) = \sqrt{2} I \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)$ ,

rezultă  $\ddot{p}_d = s \frac{\partial i}{\partial t} = s \sqrt{2} \omega I \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)$ . În acest caz, puterea activă  $P$  radiată de oscilator este:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \, dt = \frac{\mu}{6 \pi v} 2 s^2 \omega^2 I^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \, dt = \frac{\mu}{6 \pi v} s^2 \omega^2 I^2 = R_0 I^2, \quad (7.135)$$

unde

$$R_0 = \frac{\mu s^2 \omega^2}{6\pi v} \quad (7.136)$$

se numește *rezistență de radiație a oscilatorului*.

Deoarece  $\lambda = vT$  este lungimea de undă și  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , relația (7.135) se poate scrie sub forma:

$$P = \frac{\mu}{6\pi v} s^2 \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 I^2 = \frac{2}{3} \pi \mu v \left( \frac{s}{\lambda} \right)^2 I^2 = \frac{2}{3} \pi \mu \frac{s^2 f^2}{v} I^2. \quad (7.137)$$

Rezultă că puterea radiată de oscilator este proporțională cu pătratul frecvenței, motiv care justifică utilizarea frecvențelor înalte.