

6

CÂMPUL ELECTROMAGNETIC CVASISTAȚIONAR ÎN CONDUCTOARE MASIVE

6.1. ECUAȚIILE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC CVASISTAȚIONAR ÎN CONDUCTOARE MASIVE IMOBILE

În mediile conductoare imobile, ecuațiile câmpului electromagnetic se obțin scriind legile generale și de material în următoarele ipoteze simplificatoare:

a. *Ipoteza relaxației rapide a sarcinii electrice* constă din neglijarea, în conductoare, a densității de volum a sarcinii electrice,

$$\rho_v = 0. \quad (6.1)$$

Într-adevăr, înlocuind în ecuația de conservare a sarcinii electrice (5.110) densitatea de curent \mathbf{J} cu expresia din legea conducției electrice pentru medii liniare, izotrope și omogene (5.22) și ținând seama de relația (5.6), se obține:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_v = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}, \quad (6.2)$$

sau

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_v. \quad (6.3)$$

Soluția ecuației (6.3) este:

$$\rho_v(t) = \rho_v(t_0) e^{-\frac{t}{\tau_r}}, \quad (6.4)$$

unde $\rho_v(t_0)$ este valoarea densității de volum a sarcinii electrice la momentul t_0 , iar mărimea $\tau_r = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ având dimensiunea timpului este numită *constantă de relaxație*.

Conductivitatea metalelor fiind de ordinul $10^6 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ și $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1/36\pi 10^9 \text{ F/m}$, constanta de relaxație are valoarea

$$\tau_r \cong \frac{1}{36\pi 10^9 10^6} \cong 10^{-17} \text{ s}. \quad (6.5)$$

În metale, după un timp egal cu $(3 - 4)\tau_r$, densitatea de volum a sarcinii electrice poate fi considerată nulă. Sarcina electrică adusă într-un punct din interiorul unui conductor se repartizează practic instantaneu la suprafața acestuia. Deoarece în majoritatea aplicațiilor frecvențele nu depășesc 10^{10} Hz, relația (6.1) este satisfăcută în cazul conductoarelor metalice în orice regim.

Relația (6.4) constituie *teorema relaxației sarcinii electrice*.

b. *Ipoteza neglijării densității curentului de deplasare $\mathbf{J}_D = \partial \mathbf{D} / \partial t$ în raport cu densitatea curentului de conducție $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, în legea circuitului magnetic:*

$$\left| \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| \leq |\sigma \mathbf{E}| \quad (6.6)$$

La o variație sinusoidală în timp a câmpului electric $E(t) = E_m \sin \omega t$, în care $\omega = 2\pi f$ este pulsația și f - frecvența, amplitudinile densităților de curent fiind $J_D = \varepsilon \omega E_{\max}$, $J_{\max} = \sigma E_{\max}$, condiția (6.6) presupune $\omega \leq \sigma / \varepsilon$ respectiv,

$$\tau_r < \omega^{-1}, \quad (6.7)$$

Deoarece pentru metale τ_r este de ordinul 10^{-17} s, rezultă că la frecvențe $f < 10^{17}$ Hz, densitatea curentului de deplasare în conductoare este neglijabilă în raport cu densitatea curentului de conducție. Deoarece în tehnică, frecvențele utilizate nu depășesc $10^{10} - 10^{12}$ Hz, aproximația regimului cvasistaționar este în general satisfăcută.

c. *Ipoteza polarizării nule a metalelor.* Datorită polarizației \mathbf{P} extrem de mici a metalelor, aceasta se poate neglija,

$$\mathbf{P} = 0 \quad (6.8)$$

și inducția electrică în metale este $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$. Din acest motiv, în conductoare este suficient să se determine \mathbf{E} , inducția electrică \mathbf{D} fiind neglijabilă.

Conductoarele se consideră imobile, liniare, omogene din punct de vedere fizic și chimic ($\mathbf{E}_i = 0$) și izotrope. Ecuațiile legilor generale și de material în ipotezele regimului cvasistaționar sunt următoarele:

- legea fluxului magnetic,

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \operatorname{div} \mathbf{H} = 0; \quad (6.9)$$

- legea fluxului electric,

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad (6.10)$$

- legea conservării sarcinii electrice

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0; \quad (6.11)$$

- legea dependenței dintre inducție și intensitate în câmp magnetic,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad (6.12)$$

- legea conducției electrice

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}; \quad (6.13)$$

- legea inducției electromagnetice,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (6.14)$$

- legea circuitului magnetic,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}; \quad (6.15)$$

- legea inducției electromagnetice în funcție de potențialele electrodinamice

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V. \quad (6.16)$$

Deoarece în aceste ecuații intervin numai derivate parțiale de ordinul I, se numesc ecuații de primul ordin ale câmpului electromagnetic cvasistaționar în medii imobile. Ele alcătuiesc un sistem complet de ecuații și unicitatea soluțiilor rezultă prin particularizarea pentru regimul cvasistaționar a teoremei de unicitate în regim variabil. Din ecuațiile de primul ordin, în care intensitățile și inducțiile câmpurilor electric și magnetic nu intervin separat, se deduc ecuațiile pe care le satisfac fiecare dintre aceste mărimi. Deoarece în aceste ecuații intervin și derivate parțiale de ordinul al doilea, ele se numesc ecuații de ordinul al doilea ale câmpului electromagnetic cvasistaționar în medii imobile.

Ecuatia de ordinul doi pe care o satisface \mathbf{E} se obține luând rotorul ambilor membri ai ecuației (6.14):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (6.17)$$

Ținând seama de relațiile (6.10) și (6.15), rezultă:

$$\Delta \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (6.18)$$

sau

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6.19)$$

Multiplicând ecuațiile (6.18, 6.19) cu σ și ținând seama de relația (6.13), se obține ecuația de ordinul doi pe care o satisface densitatea de curenți \mathbf{J} :

$$\Delta \mathbf{J} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{J} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (6.20)$$

Dacă se ia rotorul ambilor membri ai ecuației (6.15) și se ține seama de relațiile (6.9, 6.14), se obține ecuația de ordinul doi a intensității câmpului magnetic:

$$\Delta \mathbf{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \text{rot rot} \mathbf{H} = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (6.21)$$

Dacă se multiplică ambii membri ai ecuațiilor (6.21) cu μ , se deduce ecuația de ordinul doi pe care o satisface inducția magnetică:

$$\Delta \mathbf{B} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \text{rot rot} \mathbf{B} = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (6.22)$$

Rezultă că intensitățile și inducțiile câmpurilor electric și magnetic, respectiv densitatea de curent, satisfac ecuația cu derivate parțiale de ordinul doi de tip parabolic,

$$\Delta \mathbf{G} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}; \quad \text{rot rot} \mathbf{G} = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \quad (6.23)$$

numită *ecuația difuziei*.

Factorul

$$\eta = \frac{1}{\mu\sigma} \quad (6.24)$$

se numește *difuzivitate magnetică*.

Datorită analogiei formale pe care o prezintă ecuațiile (6.23) cu ecuațiile care descriu fenomenele de difuzie, pătrunderea câmpului electromagnetic cvasistaționar în conductoare se mai numește *difuzia câmpului electromagnetic*. Ecuațiile de tipul (6.23) nu se integrează independent una de alta, deoarece soluțiile lor sunt legate prin ecuațiile de primul ordin. Pentru rezolvarea unei probleme de câmp electromagnetic se rezolvă una din ecuațiile de ordinul doi, iar celelalte mărimi se determină din ecuațiile de primul ordin. Pe suprafețele de discontinuitate trebuie impuse condițiile:

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}; \quad \mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n}; \quad \mathbf{J}_{1n} = \mathbf{J}_{2n}; \quad \mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}; \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}. \quad (6.25)$$

Prin introducerea funcțiilor auxiliare \mathbf{A}_e și V , ecuațiile de câmp se reduc ca număr și se pot integra mai simplu. Astfel, înlocuind în ecuația (6.15) $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma$ și deoarece $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}_e$, se obține:

$$\text{rot rot} \mathbf{A}_e = \mu \mathbf{J}, \quad (6.26)$$

sau

$$\text{grad div} \mathbf{A}_e - \Delta \mathbf{A}_e = \mu \mathbf{J}. \quad (6.27)$$

Ținând seama de condiția de etalonare de tip Coulomb (4.290),

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_e = 0, \quad (6.28)$$

ecuația (6.27) devine:

$$\Delta \mathbf{A}_e = -\mu \mathbf{J}. \quad (6.29)$$

Prin urmare, potențialul magnetic vector \mathbf{A}_e satisface în conductoare o ecuație de tip Poisson (6.29) și în exteriorul acestora ($\mathbf{J} = 0$) o ecuație de tip Laplace,

$$\Delta \mathbf{A}_e = 0. \quad (6.30)$$

Dacă se ține seama de relația (6.16), se obține:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} - \operatorname{grad} V_e \right) \quad (6.31)$$

și înlocuind în relația (6.27), rezultă:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}_e - \Delta \mathbf{A}_e = -\sigma \mu \left(\frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} + \operatorname{grad} V_e \right). \quad (6.32)$$

Impunând condiția $\operatorname{div} \mathbf{A}_e + \sigma \mu V_e = 0$, ecuația (6.32) are forma ecuației difuziei (6.23),

$$\Delta \mathbf{A}_e = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t}. \quad (6.33)$$

În regim armonic permanent, intensitățile și inducțiile câmpului electric și magnetic, densitatea curentului electric și potențialul vector sunt funcții de punct și sinusoidale în timp:

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}, t) = \sum_{k=1}^3 F_{K_{\max}}(\mathbf{P}) \sin[\omega t + \gamma_k(\mathbf{P})] \mathbf{u}_k, \quad (6.34)$$

în care \mathbf{F} este \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{J} sau \mathbf{A} .

Amplitudinile $F_{K_{\max}}(\mathbf{P})$ și defazajele inițiale $\gamma_k(\mathbf{P})$ sunt numai funcții de punct, iar \mathbf{u}_k sunt versorii sistemului de coordonate. Fiecare dintre componentele F_k ale vectorului \mathbf{F} , funcții sinusoidale de timp,

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}, t) = F_{K_{\max}}(\mathbf{P}) \sin[\omega t + \gamma_k(\mathbf{P})] \mathbf{u}_k \quad (6.35)$$

pot fi reprezentate în complex nesimplificat sau simplificat, după regulile stabilite la teoria circuitelor electrice.

Conform regulii de reprezentare în complex simplificat a unei funcții scalare sinusoidale $x(t)$,

$$x(t) = X_{\max} \sin(\omega t + \gamma) \leftrightarrow \underline{X} = \frac{X_{\max}}{\sqrt{2}} e^{j\gamma}, \quad (6.36)$$

se obține următoarea reprezentare în complex simplificat a componentei F_k , numită *imagine în complex simplificat* \underline{F}_k ,

$$F_k(P, t) = F_{k\max}(P) \sin[\omega t + \gamma_k(P)] \leftrightarrow \underline{F}_k = \frac{F_{k\max}(P)}{\sqrt{2}} e^{j\gamma_k(P)}. \quad (6.37)$$

Funcția original se determină cu relația:

$$F_k(P, t) = \text{Im}\{\sqrt{2}\underline{F}_k e^{j\omega t}\}. \quad (6.38)$$

Cu această reprezentare, vectorului sinusoidal în timp $F(P, t)$ îi corespunde imaginea în complex simplificat,

$$\underline{F}(P) = \sum_{k=1}^3 \underline{F}_k \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^3 \frac{F_{k\max}}{\sqrt{2}} e^{j\gamma_k} \mathbf{u}_k, \quad (6.39)$$

iar vectorul original se determină cu relația:

$$\mathbf{F}(P, t) = \text{Im}\left\{\sqrt{2} \sum_{k=1}^3 \underline{F}_k e^{j\omega t} \mathbf{u}_k\right\}. \quad (6.40)$$

Produsul scalar $\mathbf{F}\mathbf{G}$ a doi vectori sinusoidali în timp $\mathbf{F}(P, t)$ și $\mathbf{G}(P, t)$ îi corespunde produsul scalar (mărime complexă) al imaginii în complex a vectorului \mathbf{F} prin imaginea complex conjugată a vectorului \mathbf{G}^* ,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \leftrightarrow \underline{F} \cdot \underline{G}^*. \quad (6.41)$$

Produsul vectorial $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ îi corespunde produsul vectorial al imaginii în complex a vectorului \mathbf{F} prin imaginea complex conjugată a vectorului \mathbf{G}^* ,

$$\mathbf{F} \times \mathbf{G} \leftrightarrow \underline{F} \times \underline{G}^*. \quad (6.42)$$

Cu regulile de reprezentare în complex (6.40, 6.41, 6.42), la care se adaugă regula de reprezentare a operatorului de derivare, $\frac{d}{dt} \leftrightarrow j\omega$, se obțin formele în complex ale ecuațiilor de primul ordin ale câmpului electromagnetic cvasistaționar armonic permanent:

$$\text{div}\underline{\mathbf{B}} = 0; \text{div}\underline{\mathbf{H}} = 0; \quad (6.43)$$

$$\text{div}\underline{\mathbf{E}} = 0; \quad (6.44)$$

$$\text{div}\underline{\mathbf{J}} = 0; \quad (6.45)$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \mu\underline{\mathbf{H}}; \quad (6.46)$$

$$\underline{\mathbf{J}} = \sigma\underline{\mathbf{E}}; \quad (6.47)$$

$$\text{rot}\underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}; \quad (6.48)$$

$$\operatorname{rot}\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}; \quad (6.49)$$

$$\operatorname{rot}\underline{\mathbf{E}} = -j\omega\underline{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\underline{V}. \quad (6.50)$$

Ecuăției difuziei (6.23) îi corespunde forma în complex:

$$\Delta\underline{\mathbf{G}} = j\omega\mu\sigma\underline{\mathbf{G}} = \underline{\gamma}^2\underline{\mathbf{G}}; \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{\mathbf{G}} = -\underline{\gamma}^2\underline{\mathbf{G}}, \quad (6.51)$$

unde,

$$\underline{\gamma}^2 = j\omega\mu\sigma; \quad \underline{\gamma} = (1+j)\alpha; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}. \quad (6.52)$$

În relațiile (6.52), $\underline{\gamma}$ se numește *constantă de propagare*, iar α - *constantă de atenuare*.

Ecuțiile (6.51) sunt ecuații de tip Helmholtz.

6.2. INTEGRALA DE ENERGIE A CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC CVASISTAȚIONAR. PUTERI ÎN REGIM ARMONIC PERMANENT

Ca urmare a neglijării curentului de deplasare, densitatea de volum a energiei electrice w_e rezultă mult mai mică decât densitatea de volum a energiei magnetice w_m și ecuația (5.167) devine:

$$\int_0^t dt \oint_{\Sigma} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}) \mathbf{n}_i dA = \int_0^t dt \iiint_{v_{\Sigma}} \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{J}} dv + \int \iiint_{S_0 v_{\Sigma}} \underline{\mathbf{H}} d\underline{\mathbf{B}} dv. \quad (6.53)$$

Relația (6.53) reprezintă integrala de energie a câmpului electromagnetic cvasistaționar. La fel ca în regim nestaționar, cu această relație se demonstrează teorema de unicitate în regim cvasistaționar: *intensitățile câmpurilor electrice $\underline{\mathbf{E}}(P,t)$ și magnetice $\underline{\mathbf{H}}(P,t)$ într-un punct P la momentul t sunt unic determinate de valorile lor inițiale $\underline{\mathbf{E}}(P,0)$, $\underline{\mathbf{H}}(P,0)$ și de componenta tangențială, fie a câmpului electric $\underline{\mathbf{E}}_t(P_{\Sigma},t)$, fie a câmpului magnetic $\underline{\mathbf{H}}_t(P_{\Sigma},t)$, pe suprafața de frontieră Σ .*

În medii liniare, puterea electromagnetică este:

$$\oint_{\Sigma} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}) \mathbf{n}_i dA = \iiint_{v_{\Sigma}} \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{J}} dv + \frac{d}{dt} \iiint_{v_{\Sigma}} \frac{\underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{B}}}{2} dv. \quad (6.54)$$

Cu regula de reprezentare în complex a produsului vectorial, se definește vectorul complex Poynting $\underline{\mathbf{S}}$:

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* \quad (6.55)$$

și cu regula de reprezentare a produsului scalar, se definește densitatea de volum a puterii dezvoltate prin efect electrocaloric:

$$\underline{p}_j = \underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{J}}^* = \sigma\underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{E}}^* = \sigma E^2 = \rho\underline{\mathbf{J}}\underline{\mathbf{J}}^* = \rho J^2. \quad (6.56)$$

Pentru derivata în raport cu timpul a densității de volum a energiei magnetice $w_m = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{B}}$ se deduce mărimea imaginară

$$\frac{dw_m}{dt} \leftrightarrow j\omega\underline{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{B}}^* = j\omega\mu H^2. \quad (6.57)$$

Ținând seama de relațiile (6.55 – 6.57), expresia puterii electromagnetice (6.54) devine:

$$\oiint_{\Sigma} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) \mathbf{n}_i dA = \oiint_{\Sigma} \underline{\mathbf{S}} \mathbf{n}_i dA = \iiint_{v_{\Sigma}} \underline{p}_j dv + j\omega \iiint_{v_{\Sigma}} \underline{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{B}}^* dv \quad (6.58)$$

unde:

$$\underline{P} = \oiint_{\Sigma} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) \mathbf{n}_i dA = \oiint_{\Sigma} \underline{\mathbf{S}} \mathbf{n}_i dA \quad (6.59)$$

este puterea complexă transmisă suprafeței închise Σ ;

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \oiint_{\Sigma} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) \mathbf{n}_i dA \right\} = \iiint_{v_{\Sigma}} \underline{p}_j dv = \iiint_{v_{\Sigma}} \rho J^2 dv \quad (6.60)$$

reprezintă puterea activă dezvoltată în conductoarele aflate în interiorul suprafeței închise Σ ;

$$Q = \operatorname{Im} \left\{ \oiint_{\Sigma} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) \mathbf{n}_i dA \right\} = \omega\mu \iiint_{v_{\Sigma}} H^2 dv \quad (6.61)$$

este puterea reactivă dezvoltată în conductoarele aflate în interiorul suprafeței Σ .

6.3. DIFUZIA CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC CVASISTAȚIONAR ARMONIC PERMANENT ÎN SEMISPAȚIUL CONDUCTOR

Se consideră conductorul de permeabilitate μ și conductivitate σ constante, ocupând semispațiul $x > 0$ (fig. 6.1). Se alege un sistem de coordonate cu axa Ox normală pe suprafața conductorului. În dielectricul care ocupă semispațiul $x < 0$ se stabilește din exterior un câmp magnetic uniform, tangențial la suprafața conductorului și sinusoidal în timp de pulsație ω ,

$$\underline{\mathbf{H}}_0 = H_{0\max} \sin \omega t \mathbf{u}_y \quad (6.62)$$

având imaginea în complex:

$$\underline{H}_0 = \frac{H_{0\max}}{\sqrt{2}}. \quad (6.63)$$

Datorită extensiei infinite a conductorului și uniformității câmpului magnetic inductoric în dielectric, intensitățile câmpurilor electric \underline{E} , și magnetic \underline{H} , respectiv densitatea de curent în conductor \underline{J} , sunt funcții numai de x și t :

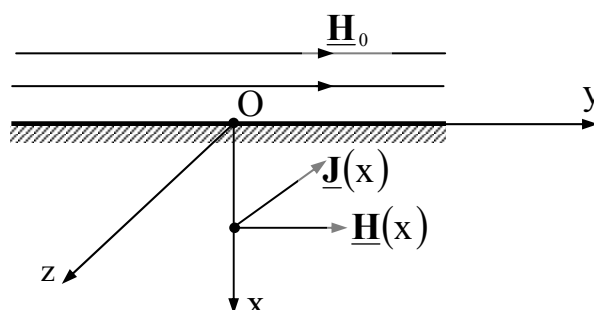


Fig. 6.1

$$\underline{E} = \underline{E}(x,t); \underline{H} = \underline{H}(x,t); \underline{J} = \underline{J}(x,t). \quad (6.64)$$

Datorită continuității componentelor tangențiale ale intensității câmpului magnetic la suprafața conductorului, câmpul magnetic în interiorul acestuia este orientat după axa Oy și are imaginea în complex $\underline{H} = \underline{H} \underline{u}_y$. Ecuația lui Helmholtz pentru câmpul magnetic (6.51) este:

$$\Delta \underline{H} = \frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial x^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{H}, \quad (6.65)$$

respectiv,

$$\frac{d^2 \underline{H}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{H}. \quad (6.66)$$

Soluția ecuației (6.66) are forma următoare:

$$\underline{H} = \underline{A} e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{B} e^{\underline{\gamma}x} = \underline{A} e^{-(1+j)\alpha x} + \underline{B} e^{(1+j)\alpha x}, \quad (6.67)$$

unde \underline{A} și \underline{B} sunt constante complexe de integrare, iar $\underline{\gamma}$ și α au expresiile (6.52).

Termenul $\underline{B} e^{(1+j)\alpha x}$ crește la infinit odată cu x și deoarece câmpul magnetic aplicat la suprafața conductorului este finit, rezultă $\underline{B} = 0$. Constanta \underline{A} se determină din condiția de continuitate a componentelor tangențiale ale intensității câmpului magnetic la suprafața conductorului:

$$\underline{H}(x=0) = \underline{A} = \underline{H}_0. \quad (6.68)$$

Cu această valoare, soluția (6.67) devine:

$$\underline{H} = \underline{H}_0 e^{-(1+j)\alpha x} = \frac{H_{0\max}}{\sqrt{2}} e^{-\alpha x} e^{-j\alpha x}. \quad (6.69)$$

Din relația (6.69) rezultă intensitatea instantanee a câmpului magnetic în conductor:

$$H(x, t) = \text{Im}\{\sqrt{2}\underline{H}e^{j\omega t}\} = H_{0\max} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \alpha x) = H_{\max}(x) \sin(\omega t - \alpha x). \quad (6.70)$$

Expresia (6.70) conține doi factori:

- unul descrescător în raport cu x , după o exponențială,

$$H_{\max}(x) = H_{0\max} e^{-\alpha x}, \quad (6.71)$$

care pune în evidență atenuarea valorii maxime a intensității câmpului magnetic; la distanța $x_0 = 1/\alpha = \delta$, măsurată de la suprafața conductorului, amplitudinea câmpului magnetic are valoarea $H_{0\max} e^{-1} \approx 0,377 H_{0\max}$, iar la distanța $x = 4\delta$ scade la $0,0184 H_{0\max}$. Cu o eroare mai mică de 2%, câmpul magnetic în interiorul conductorului se poate considera nul;

- un al doilea factor, o funcție sinusoidală de x și t ,

$$\sin(\omega t - \alpha x), \quad (6.72)$$

care pune în evidență propagarea câmpului magnetic în semispațiul conductor, în lungul axei Ox .

Pentru a determina viteza de propagare, se impune condiția ca faza la distanța x și momentul t să fie egală cu faza la distanța $x + dx$ și momentul $t + dt$:

$$\omega t - \alpha x = \omega(t + dt) - \alpha(x + dx), \quad (6.73)$$

Din relația (6.73) rezultă viteza de propagare:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\alpha} = \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma\mu}}. \quad (6.74)$$

În figura 6.2,a este reprezentată repartiția de-a lungul axei Ox a intensității câmpului magnetic în momentele t_1 și $t_2 = t_1 + \Delta t$:

$$H(x, t_1) = H_{0\max} e^{-\alpha x} \sin(\omega t_1 - \alpha x); \quad (6.75)$$

$$H(x, t_2) = H_{0\max} e^{-\alpha x} \sin(\omega t_2 - \alpha x). \quad (6.76)$$

În momentul t_1 intensitatea câmpului magnetic $H(x, t_1)$ se anulează în punctele $x_1, x_2, x_3 \dots$ în care

$$\omega t_1 - \alpha x = \pi k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (6.77)$$

iar în momentul t_2 se anulează în punctele $x'_1, x'_2, x'_3 \dots$ în care

$$\omega t_2 - \alpha x = \pi k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (6.78)$$

Deoarece $t_2 > t_1$, rezultă din diferența expresiilor (6.77) și (6.78) că $x'_1 > x_1$, $x'_2 > x_2, \dots$. Prin urmare, $H(x,t)$ reprezintă o undă amortizată care în intervalul de timp $t = t_2 - t_1$ se deplasează cu distanța $x = x'_1 - x_1 = x'_2 - x_2, \dots$ în direcția valorilor crescătoare ale lui x , deci de la suprafața conductorului spre interiorul acestuia.

Distanța parcursă de unda $H(x,t)$ în cursul unei perioade a oscilației se numește *lungime de undă* λ ,

$$\lambda = vT = \frac{2\pi}{\alpha}. \quad (6.79)$$

Densitatea curentului electric indus în conductor, numit *curent turbionar* sau *Foucault*, se determină din legea circuitului magnetic și se obține:

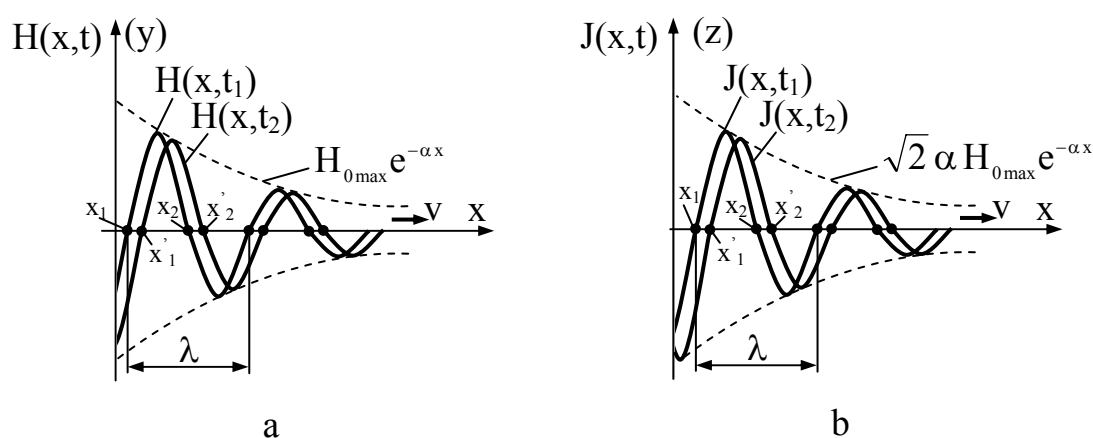


Fig. 6.2

$$\underline{\mathbf{J}} = \text{rot} \underline{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \underline{H} & 0 \end{vmatrix} = \frac{d\underline{H}}{dx} \mathbf{u}_z = -\underline{\gamma} \underline{H}_0 e^{-\underline{\gamma}x} \mathbf{u}_z. \quad (6.80)$$

Vectorul $\underline{\mathbf{J}}$ este orientat după semiaxa negativă Oz și are modulul:

$$\underline{J} = (1 + j) \alpha \underline{H}_0 e^{-(1+j)\alpha x}. \quad (6.81)$$

Densitatea instantanee de curent are următoarea expresie:

$$J(x, t) = \text{Im} \left\{ \sqrt{2} \underline{J} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \alpha H_{0\text{max}} e^{-\alpha x} \sin \left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4} \right). \quad (6.82)$$

Se observă că densitatea curentului indus are aceeași viteză, lungime de undă și constantă de atenuare ca și câmpul magnetic, dar defazată cu $\pi/4$ înaintea acestuia (fig. 6.2, b).

Câmpul electric complex în conductor se obține din legea conducției electrice:

$$\underline{E} = \frac{\underline{J}}{\sigma} = (1 + j) \frac{\alpha \underline{H}_0}{\sigma} e^{-(1+j)\alpha x}. \quad (6.83)$$

Din relația (6.83) se determină intensitatea instantanee a câmpului electric:

$$E(x, t) = \text{Im} \left\{ \sqrt{2} \underline{E} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \alpha H_{0\text{max}} e^{-\alpha x} \frac{1}{\sigma} \sin \left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4} \right). \quad (6.84)$$

Raportul dintre modulele vectorilor complecși \underline{E} și \underline{H} este același în orice punct din conductor și se numește *impedanță de undă*,

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = (1 + j) \frac{\alpha}{\sigma} = (1 + j) \frac{1}{\sigma \delta}. \quad (6.85)$$

Partea reală a impedanței de undă este *rezistența de undă* R_0 , iar partea imaginară este *reactanța de undă* X_0 ,

$$R_0 = \frac{1}{\sigma \delta}; \quad X_0 = \frac{1}{\sigma \delta}. \quad (6.86)$$

Din relațiile (6.70), (6.82) și (6.84) se observă că amplitudinile intensităților câmpurilor magnetic și electric și a densității de curent scad exponențial în conductor,

$$G = G_0 e^{-\alpha x}, \quad (6.87)$$

unde G este E , H , B sau J .

Din relația (6.87) rezultă:

$$x = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{G_0}{G}. \quad (6.88)$$

Distanța

$$x_0 = \delta = \frac{1}{\alpha} \quad (6.89)$$

măsurată de la suprafața conductorului în care $\ln G_0/G = 1$, egală cu distanța în care amplitudinile sunt atenuate cu 1 neper, se numește *adâncime de pătrundere a câmpului electromagnetic în semispațiul conductor*.

Din relațiile (6.52₃, 6.89), rezultă:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}. \quad (6.90)$$

Parametrul δ caracterizează pătrunderea cu atenuare exponențială a câmpului electromagnetic și scade cu creșterea frecvenței, permeabilității sau conductivității.

Vectorul complex Poynting pe suprafața conductorului se calculează cu relația (9.33) în care se înlocuiesc expresiile intensităților câmpurilor magnetic și electric (6.69) și (6.83):

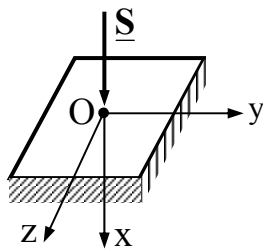


Fig. 6.3

$$\underline{\mathbf{S}}|_{x=0} = \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*|_{x=0} = (1 + j) \frac{\alpha H_{0\max}^2}{2\sigma} \mathbf{u}_x. \quad (6.91)$$

Din relația (9.67) rezultă că vectorul $\underline{\mathbf{S}}$ este orientat normal pe suprafața conductorului de la dielectric către conductor (fig. 6.3). Părțile reală, respectiv imaginară reprezintă puterile activă și reactivă absorbite pe unitatea de suprafață:

$$P_s = \operatorname{Re}\{\underline{\mathbf{S}}\} = \frac{\alpha H_{0\max}^2}{2\sigma}; \quad Q_s = \operatorname{Im}\{\underline{\mathbf{S}}\} = \frac{\alpha H_{0\max}^2}{2\sigma}. \quad (6.92)$$

6.4. EFECTELE DIFUZIEI CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC CVASISTAȚIONAR ARMONIC PERMANENT ÎN CONDUCTOARE MASIVE

Principalele efecte ale difuziei câmpului electromagnetic cvasistaționar armonic permanent în conductoare masive sunt următoarele:

- curenți turbionari;
- efectul pelicular;
- efectul de proximitate;
- efectul Field;
- efectul de buclă;
- efectul de ecranare electromagnetică;
- efectul de levitație electromagnetică.

6.4.1. Curenți turbionari

În conductoarele situate în câmp magnetic variabil în timp, se induc curenți numiți *curenți turbionari* sau *Foucault*. Prin inducerea acestor curenți și prin câmpul magnetic suplimentar pe care îl stabilesc, numit câmp magnetic de reacție, se modifică câmpul magnetic inductor. Curenții turbionari intervin în studiul fenomenelor din miezurile feromagnetice ale mașinilor și aparatelor electrice de curent alternativ, determinând pierderi de putere și înrăutățirea condițiilor de funcționare. Există însă și aplicații utile ale curenților turbionari cum sunt: încălzirea prin inducție, frâne și ambreiaje electromagnetice etc.

Curenți turbionari induși în placa de extensie infinită. Se consideră o placă conductoare infinit lungă de grosime Δ , situată în câmp magnetic inductor sinusoidal în timp $\underline{H}_0 = H_{0\max} \sin \omega t \underline{u}_z$, uniform în lipsa plăcii și orientat tangențial la fețele acesteia (fig. 6.4). Datorită extensiei infinite a plăcii, mărimile de stare ale câmpului electromagnetic depind numai de coordonata după grosimea plăcii. Din

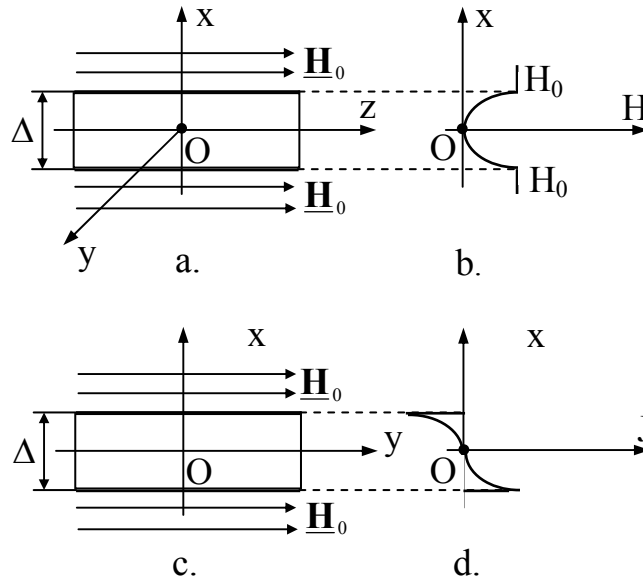


Fig. 6.4

continuitatea componentelor tangențiale ale câmpului magnetic pe suprafața plăcii, în interiorul acesteia câmpul magnetic \underline{H} este orientat după axa Oz și satisface ecuația lui Helmholtz:

$$\Delta \underline{H} = \underline{\gamma}^2 \underline{H}; \text{ respectiv } \frac{d^2 \underline{H}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{H} \quad (6.93)$$

cu soluția:

$$\underline{H} = \underline{A} e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{B} e^{\underline{\gamma}x}. \quad (6.94)$$

Din condiția de simetrie $\underline{H}_i(x) = \underline{H}_i(-x)$ și din condiția pe fețele plăcii $\underline{H}\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \underline{H}\left(-\frac{\Delta}{2}\right) = \underline{H}_0$, rezultă valorile constantelor \underline{A} și \underline{B} :

$$\underline{A} = \underline{B} = \frac{\underline{H}_0}{2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} \frac{\Delta}{2}}. \quad (6.95)$$

Introducând (6.95) în (6.94), rezultă:

$$\underline{H} = \underline{A} (e^{-\underline{\gamma}x} + e^{\underline{\gamma}x}) = 2 \underline{A} \operatorname{ch} \underline{\gamma} x = \underline{H}_0 \frac{\operatorname{ch} \underline{\gamma} x}{\operatorname{ch} \underline{\gamma} \frac{\Delta}{2}}. \quad (6.96)$$

Din legea circuitului magnetic,

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{u}}_x & \underline{\mathbf{u}}_y & \underline{\mathbf{u}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \underline{\mathbf{H}} \end{vmatrix} = -\frac{d\underline{\mathbf{H}}}{dx} \underline{\mathbf{u}}_y = \underline{\mathbf{J}} \underline{\mathbf{u}}_y = \sigma \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{u}}_y \quad (6.97)$$

se obține intensitatea câmpului electric, respectiv densitatea curentului indus:

$$\underline{\mathbf{E}} = -\frac{1}{\sigma} \frac{d\underline{\mathbf{H}}}{dx} = -\frac{\gamma}{\sigma} \underline{\mathbf{H}}_0 \frac{\operatorname{sh} \gamma x}{\operatorname{ch} \gamma \frac{\Delta}{2}}; \quad \underline{\mathbf{J}} = \sigma \underline{\mathbf{E}} = -\gamma \underline{\mathbf{H}}_0 \frac{\operatorname{sh} \gamma x}{\operatorname{ch} \gamma \frac{\Delta}{2}}. \quad (6.98)$$

Pentru determinarea valorilor efective ale intensităților câmpurilor magnetic și electric și a densității de curent, se ține seama de relațiile:

$$\begin{aligned} |\operatorname{sh} \gamma x|^2 &= \operatorname{sh}(\alpha x + j\alpha x) \operatorname{sh}(\alpha x - j\alpha x) = \frac{\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\alpha x}{2}; \\ |\operatorname{ch} \gamma x|^2 &= \operatorname{ch}(\alpha x + j\alpha x) \operatorname{ch}(\alpha x - j\alpha x) = \frac{\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\alpha x}{2}; \\ \left| \operatorname{ch} \gamma \frac{\Delta}{2} \right|^2 &= \operatorname{ch} \left(\alpha \frac{\Delta}{2} + j\alpha \frac{\Delta}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\alpha \frac{\Delta}{2} - j\alpha \frac{\Delta}{2} \right) = \frac{\operatorname{ch} \alpha \Delta + \cos \alpha \Delta}{2}. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Rezultă:

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{H_{0\max}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\alpha x}{\operatorname{ch} \alpha \Delta + \cos \alpha \Delta}}; \quad (6.100)$$

$$\underline{\mathbf{J}} = \alpha H_{0\max} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\alpha x}{\operatorname{ch} \alpha \Delta + \cos \alpha \Delta}}. \quad (6.101)$$

Vectorul lui Poynting $\underline{\mathbf{S}}$ la suprafața plăcii este normal pe fețele plăcii și orientat către placă:

$$\underline{\mathbf{S}} \Big|_{x=\pm \frac{\Delta}{2}} = \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}} \Big|_{x=\pm \frac{\Delta}{2}} = \mp \frac{\gamma H_0^2}{\sigma} \frac{\operatorname{sh} \gamma \frac{\Delta}{2}}{\operatorname{ch} \gamma \frac{\Delta}{2}} (\underline{\mathbf{u}}_y \times \underline{\mathbf{u}}_z) = \mp \frac{\gamma H_0^2}{\sigma} \frac{\operatorname{sh} \gamma \frac{\Delta}{2}}{\operatorname{ch} \gamma \frac{\Delta}{2}} \underline{\mathbf{u}}_x. \quad (6.102)$$

Părțile reală, respectiv imaginară a puterii complexe

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{\gamma H_0^2}{\sigma} \frac{\operatorname{sh} \gamma \frac{\Delta}{2}}{\operatorname{ch} \gamma \frac{\Delta}{2}} = (1 + j)\alpha \frac{H_0^2}{\sigma} \frac{\operatorname{sh} \gamma \frac{\Delta}{2}}{\operatorname{ch} \gamma \frac{\Delta}{2}} \quad (6.103)$$

reprezintă puterile activă și reactivă specifice:

$$P_s = \frac{\alpha H_{0\max}^2}{\sigma} \frac{\operatorname{sh} \alpha \Delta - \sin \alpha \Delta}{\operatorname{ch} \alpha \Delta + \cos \alpha \Delta}; \quad Q_s = \frac{\alpha H_{0\max}^2}{\sigma} \frac{\operatorname{sh} \alpha \Delta + \sin \alpha \Delta}{\operatorname{ch} \alpha \Delta + \cos \alpha \Delta}. \quad (6.104)$$

Aproximația la frecvențe joase. Pentru valori mici ale argumentului $\alpha \frac{\Delta}{2}$, $\alpha \frac{\Delta}{2} = \frac{1}{\delta} \frac{\Delta}{2} \ll 1$, adică pentru

$$\delta \gg \frac{\Delta}{2}, \quad (6.105)$$

funcțiile sinusoidale și hiperbolice pot fi approximate prin polinoamele de grad n ale dezvoltărilor lor în serie. Acest regim de pătrundere a câmpului electromagnetic se numește *regim de refulare slabă*. Din relațiile (6.90) și (6.105) rezultă că acest regim se stabilește la valori mici ale lui σ , μ sau f . La valori date pentru σ și μ , este un *regim de refulare la frecvențe joase*

$$f \ll \frac{4}{\pi \mu \sigma \Delta^2}. \quad (6.106)$$

În aproximația de ordinul doi, relațiile (6.96, 6.98) devin:

$$\underline{H} = \underline{H}_0 \left[1 + j \frac{\alpha^2}{2} \left(x^2 - \frac{\Delta^2}{2} \right) \right]; \quad \underline{J} = -\underline{\gamma}^2 \underline{H}_0 \left[1 + j \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{\Delta^2}{4} \right) \right], \quad (6.107)$$

iar pentru puterile activă și reactivă se obțin expresiile:

$$P_s = \frac{\alpha^4 \Delta^3 H_{0\max}^2}{6 \sigma}; \quad Q_s = \frac{\alpha^2 \Delta H_{0\max}^2}{\sigma}. \quad (6.108)$$

Densitatea de volum a puterii active

$$p = \frac{P_s}{\Delta} = \frac{\pi^2 \sigma f^2 \Delta^2}{6} B_{0\max}^2 \quad (6.109)$$

este proporțională cu pătratul frecvenței, inducției maxime și grosimii plăcii. La frecvență și inducție date, pierderile de putere activă prin curenți turbionari în placă se reduc prin micșorarea grosimii Δ a plăcii. Din acest motiv, miezurile magnetice mașinilor și aparatele electrice de curent alternativ se divizează în tole de grosime 0,05 – 0,5 mm. Pierderile de putere p fiind proporționale cu conductivitatea σ , o reducere a acestora se mai obține măbind rezistența electrică prin adaos de siliciu.

Aproximația la frecvențe înalte. Deoarece la valori mari ale argumentului $\alpha \frac{\Delta}{2}$, adică la frecvențe $f \gg \frac{4}{\pi \mu \sigma \Delta^2}$, $\operatorname{sh} y = \operatorname{ch} y \cong \frac{e^y}{2}$, relațiile (6.96, 6.98) devin:

$$\underline{H} = \underline{H}_0 e^{-\gamma\left(\frac{\Delta}{2}-x\right)}; \quad \underline{J} = -\gamma \underline{H}_0 e^{-\gamma\left(\frac{\Delta}{2}-x\right)}. \quad (6.110)$$

Câmpul magnetic și densitatea de curent sunt nenule numai pe fâșiile de grosime $\frac{\Delta}{2} - x$ situate pe ambele fețe ale plăcii (fig. 6.4, b, d). Acest regim de pătrundere a câmpului electromagnetic este un *regim de refulare netă*. Acest regim se stabilește la valori mici ale lui σ , μ sau f . La valori date pentru σ și μ , este un *regim de refulare la frecvențe înalte*.

Cu relațiile (6.110) se determină puterile activă și reactivă:

$$P_s = \frac{\alpha H_{0\max}^2}{\sigma}; \quad Q_s = \frac{\alpha H_{0\max}^2}{\sigma}. \quad (6.111)$$

6.4.2. Efectul pelicular

Repartiția în conductoare a curentului variabil în timp este diferită de cea a curentului continuu. De exemplu, într-un conductor drept valoarea efectivă a densității curentului sinusoidal în timp este maximă pe suprafața conductorului și scade pe măsura depărtării de suprafață spre interiorul conductorului. Acest fenomen se numește *efect pelicular*.

Efectul pelicular determină mărirea rezistenței electrice a conductoarelor și micșorarea inductivității circuitelor electrice. Prima consecință se datorează faptului că nu întreaga secțiune a conductorului este parcursă de curent, iar cea de a doua este legată de diminuarea câmpului magnetic în interiorul conductorului, ceea ce determină micșorarea inductivității interioare.

În teoria circuitelor electrice cu parametri concentrați se admite ipoteza repartiției uniforme a curentului electric în conductoare. În aceste condiții, conductoarele se consideră filiforme. În regim cvasistaționar armonic permanent, impedanța unui conductor filiform între două puncte A și B se definește cu oricare dintre relațiile:

$$Z_{AB} = \frac{U_{AB}}{I}; \quad Z_{AB} = \frac{S}{I^2}; \quad Z_{AB} = \frac{U_{AB}^2}{S}, \quad (6.112)$$

unde S este puterea aparentă. Prima definiție rezultă din relația lui Ohm și constituie definiția liniară a impedanței, iar celelalte două sunt definiții energetice. Pentru un conductor drept parcurs de curent sinusoidal în timp, câmpul electric având valori diferite pe conturul secțiunii transversale drepte, nu se poate defini univoc o tensiune electrică în lungul firului și prin urmare prima relație (6.112) nu poate fi utilizată pentru definirea impedanței. În regim armonic permanent, impedanța, rezistența și inductivitatea interioară a conductorului se definesc energetic cu a doua relație (6.112).

Notând cu R_a rezistența în alternativ și identificând expresia puterii active P absorbite de un conductor parcurs de curent sinusoidal (6.60) cu produsul $R_a I^2$, se obține:

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \iint_{\Sigma} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) \mathbf{n}_i \, dA \right\} = \iiint_{v_{\Sigma}} p_j \, dv = \iiint_{v_{\Sigma}} \rho J^2 \, dv = R_a I^2. \quad (6.113)$$

Din relația (6.113) se deduc expresiile rezistenței în alternativ:

$$R_a = \frac{1}{I^2} \iiint_{v_{\Sigma}} \rho J^2 \, dv; \quad R_a = \frac{1}{I^2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_{\Sigma} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) \mathbf{n}_i \, dA \right\}. \quad (6.114)$$

Dacă se notează cu P_0 puterea dezvoltată în curent continuu a cărui intensitate este egală cu valoarea efectivă a curentului sinusoidal, iar cu R_0 rezistența în curent continuu, se obține:

$$P_0 = R_0 I^2. \quad (6.115)$$

Raportul

$$k_R = \frac{P}{P_0} = \frac{R_a}{R_0} \quad (6.116)$$

se numește *factor în alternativ al rezistenței*.

Prin analogie cu relația rezistenței în curent continuu a unui conductor drept de lungime ℓ și arie a secțiunii transversale A_0 ,

$$R_0 = \frac{\ell}{\sigma A_0}, \quad (6.117)$$

se definește o relație similară pentru R_a ,

$$R_a = \frac{\ell}{\sigma A_a}, \quad (6.118)$$

unde $A_a < A_0$ este aria echivalentă a secțiunii conductorului în curent alternativ.

Din relațiile (6.114, 6.116) rezultă:

$$k_R = \frac{A_0}{\ell I^2} \iiint_{v_{\Sigma}} J^2 \, dv = \frac{A_0 \sigma}{\ell I^2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_{\Sigma} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) \mathbf{n}_i \, dA \right\} = \frac{A_0 \sigma}{\ell I^2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_{\Sigma} \underline{\mathbf{S}} \mathbf{n}_i \, dA \right\}. \quad (6.119)$$

Rezistența în alternativ R_a este mai mare decât rezistența în curent continuu R_0 și deci factorul k_R este supraunitar.

Identificând relația puterii reactive (6.61) cu $Q = X_i I^2 = \omega L_i I^2$, unde X_i este reactanța inductivă interioară a conductorului, se obțin următoarele expresii ale inductivității interioare L_i :

$$L_i = \frac{\mu}{I^2} \iiint_{v_{\Sigma}} H^2 \, dv; \quad L_i = \frac{1}{\omega I^2} \operatorname{Im} \left\{ \iint_{\Sigma} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) \mathbf{n}_i \, dA \right\}. \quad (6.120)$$

Raportul

$$k_L = \frac{L_{i0}}{L_i}, \quad (6.121)$$

unde L_{i0} este inductivitatea interioară a conductorului în regim staționar (v. par. 5.3.4) se numește *factor în alternativ al inductivității interioare*. Ca urmare a efectului pelicular, puterea reactivă scade și deci factorul k_L este subunitar ($k_L < 1$).

a. Efectul pelicular în conductorul cilindric circular. Se consideră un conductor cilindric circular de rază a infinit lung și izolat de alte conductoare (fig. 6.5), parcurs de curentul $i(t) = \sqrt{2} I \sin \omega t$. Conductorul are permeabilitatea μ_i și

conductivitatea σ constante. Datorită extensiei infinite a conductorului și simetriei în raport cu axa Oz , mărimile de câmp depind numai de coordonata radială r . Problema este axial electrică, respectiv transversal magnetică, adică:

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}(r)\mathbf{u}_z; \quad \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}(r)\mathbf{u}_\varphi. \quad (6.122)$$

În exteriorul conductorului, câmpul electric complex $\underline{\mathbf{E}}_e$ satisface ecuația Laplace,

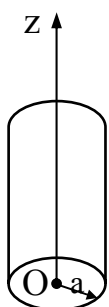


Fig. 6.5

$$\Delta \underline{\mathbf{E}}_e = 0, \quad (6.123)$$

respectiv

$$\frac{d^2 \underline{\mathbf{E}}_e}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \underline{\mathbf{E}}_e}{dr} = 0. \quad (6.124)$$

Soluția ecuației (6.124) are forma:

$$\underline{\mathbf{E}}_e = \underline{\mathbf{A}} \ln r + \underline{\mathbf{B}}, \quad (6.125)$$

unde $\underline{\mathbf{A}}$ și $\underline{\mathbf{B}}$ sunt constante complexe de integrare.

Aplicând legea inducției electromagnetice,

$$\text{rot} \underline{\mathbf{E}}_e = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{u}_r \times \underline{\mathbf{E}}_e \mathbf{u}_z = -\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}_e}{\partial r} \mathbf{u}_\varphi = -j\omega \mu_e \underline{\mathbf{H}}_e \quad (6.126)$$

se obține câmpul magnetic complex

$$\underline{\mathbf{H}}_e = \frac{1}{j\omega \mu_e} \frac{d \underline{\mathbf{E}}_e}{dr} = \frac{\underline{\mathbf{A}}}{j\omega \mu_e} \frac{1}{r}, \quad (6.127)$$

unde μ_e este permeabilitatea dielectricului din exteriorul conductorului.

Din legea circuitului magnetic aplicată cercului de rază $r > a$

$$\oint_{\Gamma_r} \underline{\mathbf{H}}_e dr = 2\pi r \underline{\mathbf{H}}_e = \underline{\mathbf{I}} \quad (6.128)$$

se obține:

$$\underline{H}_e = \frac{\underline{I}}{2\pi r}. \quad (6.129)$$

Identificând relațiile (6.127) și (6.129) se obține constanta \underline{A} :

$$\underline{A} = \frac{j\omega\mu_e \underline{I}}{2\pi} \quad (6.130)$$

și cu această valoare introdusă în (6.125) rezultă:

$$\underline{E}_e(r) = \frac{j\omega\mu_e \underline{I}}{2\pi} \ln r + \underline{B}. \quad (6.131)$$

În interiorul conductorului, câmpul electric complex \underline{E}_i satisface ecuația Helmholtz

$$\Delta \underline{E}_i = \underline{\gamma}^2 \underline{E}_i, \quad (6.132)$$

respectiv

$$\frac{d^2 \underline{E}_e}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\underline{E}_e}{dr} = \underline{\gamma}^2 \underline{E}_i. \quad (6.133)$$

Ecuția (6.133) este o ecuație de tip Bessel a cărei soluție are forma:

$$\underline{E}_i = \underline{C} I_0(\underline{\gamma} r) + \underline{D} K_0(\underline{\gamma} r), \quad (6.134)$$

unde $I_n(\underline{\gamma} r)$ și $K_n(\underline{\gamma} r)$ sunt funcțiile modificate Bessel de prima și a doua speță și de ordin n , iar \underline{C} și \underline{D} sunt constante complexe de integrare.

Din legea inducției electromagnetice

$$\text{rot} \underline{E}_i = \frac{\partial}{\partial r} \underline{u}_r \times \underline{E}_i \underline{u}_z = -\frac{\partial \underline{E}_i}{\partial r} \underline{u}_\varphi = -j\omega\mu_i \underline{H}_i \quad (6.135)$$

și ținând seama de relațiile

$$\frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x); \quad \frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x), \quad (6.136)$$

se obține câmpul magnetic complex în interiorul conductorului:

$$\underline{H}_i = \frac{1}{j\omega\mu_i} \frac{d\underline{E}_i}{dr} = \frac{\sigma}{\underline{\gamma}} [\underline{C} I_1(\underline{\gamma} r) - \underline{D} K_1(\underline{\gamma} r)]. \quad (6.137)$$

Deoarece câmpul magnetic este nul în axă ($r = 0$) și termenul $K_1(0)$ este infinit, rezultă $\underline{D} = 0$. Prin urmare, relația (6.137) devine:

$$\underline{H}_i = \frac{\sigma \underline{C}}{\underline{\gamma}} I_1(\underline{\gamma} r). \quad (6.138)$$

Din condiția de continuitate a componentelor tangențiale ale intensității câmpului magnetic la suprafața conductorului, $\underline{H}_e(a) = \underline{H}_i(a)$ și din relațiile (6.129, 6.138) se obține:

$$\underline{C} = \frac{\underline{\gamma} \underline{I}}{2 \pi a \sigma} \frac{1}{I_1(\underline{\gamma} a)}. \quad (6.139)$$

Cu această valoare a constantei \underline{C} , soluțiile problemei interioare sunt:

$$\underline{E}_i = \frac{\underline{\gamma} \underline{I}}{2 \pi a \sigma} \frac{I_0(\underline{\gamma} r)}{I_1(\underline{\gamma} a)}; \quad \underline{H}_i = \frac{\underline{I}}{2 \pi a} \frac{I_1(\underline{\gamma} r)}{I_1(\underline{\gamma} a)}. \quad (6.140)$$

Din continuitatea câmpului electric complex pe suprafața conductorului, $\underline{E}_e(a) = \underline{E}_i(a)$, se deduce constanta \underline{B} :

$$\underline{B} = \frac{\underline{\gamma} \underline{I}}{2 \pi a \sigma} \left[\frac{1}{a} \frac{I_0(\underline{\gamma} a)}{I_1(\underline{\gamma} a)} - \frac{\mu_e}{\mu_i} \underline{\gamma} \ln a \right]. \quad (6.141)$$

Raportul dintre densitățile de curent într-un punct situat la distanța r de axă și pe suprafața conductorului, se poate scrie sub forma:

$$\frac{\underline{J}(r)}{\underline{J}(a)} = \frac{I_0(\underline{\gamma} r)}{I_0(\underline{\gamma} a)} = \frac{M_0(\alpha r)}{M_0(\alpha a)} e^{-j[\theta_0(\alpha a) - \theta_0(\alpha r)]}, \quad (6.142)$$

unde $M_n(x)$ și $\theta_n(x)$ reprezintă funcțiile modul și argument.

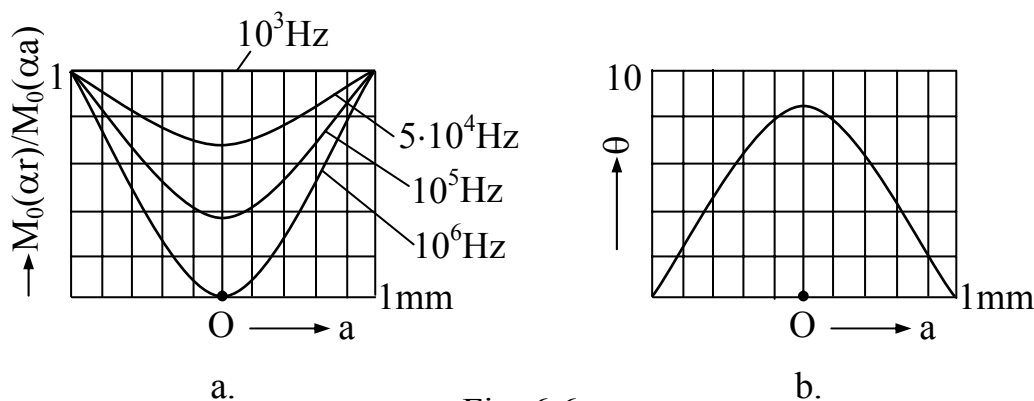


Fig. 6.6

Prin alegerea densității de curent la suprafața conductorului origine de fază, fazorul $\underline{J}(r)$ rezultă defazat cu unghiul $\theta(r) = \theta_0(\alpha a) - \theta_0(\alpha r)$. În figura 6.6, a s-au reprezentat la diferite frecvențe curbele $\frac{M_0(\alpha r)}{M_0(\alpha a)}$ pentru un fir de cupru având

diametrul de 1mm, iar în figura 9.11, b curba $\theta(r)$ pentru $f = 10^6$ Hz. Curbele pun în evidență efectul pelicular; pentru $f = 10^5$ Hz, densitatea de curent în axă $J(0)$ scade sub jumătate din valoarea ei la suprafață $J(a)$ și pentru $f = 10^6$ Hz, este numai 6,6% din $J(a)$.

Vectorul complex Poynting pe suprafața conductorului se calculează utilizând relațiile (6.140)

$$\underline{\mathbf{S}}|_{r=a} = \underline{\mathbf{E}}_i \times \underline{\mathbf{H}}_i|_{r=a} = -\frac{\underline{\gamma} I^2}{(2\pi a)^2 \sigma} \frac{I_0(\underline{\gamma} a)}{I_1(\underline{\gamma} a)} \mathbf{u}_r \quad (6.143)$$

și este orientat radial spre conductor.

Din expresia puterii complexe pe unitatea de lungime,

$$\iint_{S_r} \underline{\mathbf{S}} \mathbf{n}_i \, dA = \frac{\underline{\gamma} I^2}{2\pi a \sigma} \frac{I_0(\underline{\gamma} a)}{I_1(\underline{\gamma} a)} \quad (6.144)$$

se determină puterile interioare activă și reactivă:

$$P = \frac{\alpha I^2}{2\pi a \sigma} \operatorname{Re} \left\{ (1+j) \frac{I_0(\underline{\gamma} a)}{I_1(\underline{\gamma} a)} \right\}; \quad Q = \frac{\alpha I^2}{2\pi a \sigma} \operatorname{Im} \left\{ (1+j) \frac{I_0(\underline{\gamma} a)}{I_1(\underline{\gamma} a)} \right\}. \quad (6.145)$$

Ținând seama de expresia puterii dezvoltate în curent continuu, $P_0 = I^2 / \pi a^2 \sigma$, rezultă factorul de creștere a rezistenței în alternativ:

$$k_R = \frac{\alpha a}{2} \operatorname{Re} \left\{ (1+j) \frac{I_0(\underline{\gamma} a)}{I_1(\underline{\gamma} a)} \right\}. \quad (6.146)$$

Din expresia puterii reactive (6.145) se deduc reactanța X_i și inductivitatea interioară L_i pe unitatea de lungime:

$$X_i = \frac{\alpha}{2\pi a \sigma} \operatorname{Im} \left\{ (1+j) \frac{I_0(\underline{\gamma} a)}{I_1(\underline{\gamma} a)} \right\}; \quad L_i = \frac{X_i}{\omega}. \quad (6.147)$$

Aproximația la efect pelicular slab. La valori mici ale argumentului $\frac{a}{\delta}$, funcțiile Bessel pot fi approximate prin polinoame de grad n ale dezvoltărilor lor în serie. În aproximația de ordinul doi, rezultă:

$$\underline{\mathbf{E}}_i \cong \lim_{\frac{a}{\delta} \ll 1} \frac{\underline{\gamma} I}{2\pi a \sigma} \frac{I_0(\underline{\gamma} r)}{I_1(\underline{\gamma} a)} \cong \frac{\underline{\gamma} I}{2\pi a \sigma} \frac{1 + \left(\frac{\underline{\gamma} r}{2}\right)^2}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{\gamma} a}{2}\right)^2} \cong \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \left[1 + \frac{\underline{\gamma}^2}{4} \left(r^2 - \frac{a^2}{2} \right) \right]; \quad (6.148)$$

$$\underline{\mathbf{J}} \cong \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \left[1 + \frac{\underline{\gamma}^2}{4} \left(r^2 - \frac{a^2}{2} \right) \right]; \quad (6.149)$$

$$\underline{H}_i \cong \lim_{\frac{a}{\delta} \ll 1} \frac{\underline{I}}{2\pi a} \frac{I_1(\underline{\gamma}r)}{I_1(\underline{\gamma}a)} \cong \frac{\underline{I}}{2\pi a} \frac{\frac{\underline{\gamma}r}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{\gamma}r}{2} \right)^2 \right]}{\frac{\underline{\gamma}a}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{\gamma}a}{2} \right)^2 \right]} \cong \frac{\underline{I}r}{2\pi a^2} \left[1 + \frac{\underline{\gamma}^2}{8} (r^2 - a^2) \right]. \quad (6.150)$$

Din condiția $\frac{a}{\delta} \ll 1$, rezultă că la μ , σ și a dați, pentru frecvențe $f \ll \frac{1}{\pi\mu\sigma a^2}$, se obține *aproximația la frecvențe joase sau efect pelicular slab*.

Aproximația la efect pelicular net. La valori mari ale argumentului $\frac{a}{\delta}$, funcțiile Bessel se înlocuiesc cu aproximațiile lor asimptotice,

$$I_n(x) \cong \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad (6.151)$$

și relațiile (6.140) devin:

$$\underline{E}_i \cong \frac{\underline{\gamma}\underline{I}}{2\pi a\sigma} e^{-\underline{\gamma}(a-r)}; \quad \underline{H}_i \cong \frac{\underline{\gamma}\underline{I}}{2\pi a} e^{-\underline{\gamma}(a-r)}. \quad (6.152)$$

Pe pelicula periferică de grosime $\Delta r = a - r$, amplitudinile câmpurilor electric și magnetic sunt atenuate exponențial la fel ca la semispațiul conductor. Ca urmare, la valori mari ale raportului $\frac{a}{\delta}$, pătrunderea câmpului electromagnetic în conductor

este parțială. Pentru μ , σ și a dați, la frecvențe $f \gg \frac{1}{\pi\mu\sigma a^2}$ are loc o refulare intensă a curentului la suprafața conductorului și se obține *aproximația la frecvențe înalte sau efect pelicular net*.

Observație. Efectul pelicular depinde de valorile raportului $\frac{a}{\delta} = \sqrt{\mu_i f \sigma A_0}$, unde

$A_0 = \pi a^2$. *Refularea curentului este slabă la valori mici ale frecvenței f , a permeabilității μ_i , a conductivității σ sau a razei conductorului a și este intensă la valori mari ale fiecăreia dintre aceste mărimi. La efect pelicular net curentul se repartizează la periferie ca într-un cilindru cav având grosimea de ordinul parametrului δ . Din acest motiv, la refulare intensă a curentului se preferă conductoarele tip funie (liță), firele fiind răsucite încât să ocupe toate pozițiile în raport cu axa funiei.*

b. Efectul pelicular în placa de extensie infinită. Se consideră o placă de grosime Δ parcursă de curentul $i_s = \sqrt{2}I_s \sin \omega t$ pe unitatea de lățime. În sistemul de coordonate cu planul yOz în planul de simetrie al plăcii și cu axa Ox normală pe

fețele acesteia (fig. 6.7), densitatea de curent este orientată după axa pozitivă Oz și depinde numai de coordonata x, $\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{J}}(x)\mathbf{u}_z$.

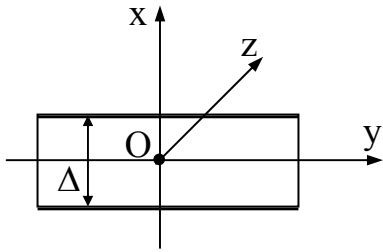


Fig. 6.7

În interiorul plăcii densitatea de curent satisface ecuația Helmholtz

$$\frac{d^2 \underline{\mathbf{J}}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{\mathbf{J}} \quad (6.153)$$

a cărei soluție este de forma:

$$\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{A}} e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{\mathbf{B}} e^{\underline{\gamma}x}. \quad (6.154)$$

Din condiția de simetrie $\underline{\mathbf{J}}(x) = \underline{\mathbf{J}}(-x)$, rezultă $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{B}}$ și soluția (6.154) devine:

$$\underline{\mathbf{J}} = 2\underline{\mathbf{A}} \operatorname{ch} \underline{\gamma}x. \quad (6.155)$$

Fluxul densității de curent fiind egal cu \underline{I}_s ,

$$\underline{I}_s = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \underline{\mathbf{J}} dx = 2\underline{\mathbf{A}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \operatorname{ch} \underline{\gamma}x dx = \frac{4\underline{\mathbf{A}}}{\underline{\gamma}} \operatorname{sh} \underline{\gamma} \frac{\Delta}{2}, \quad (6.156)$$

rezultă:

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{\underline{\gamma} \underline{I}_s}{4 \operatorname{sh} \underline{\gamma} \frac{\Delta}{2}}. \quad (6.157)$$

Înlocuind constanta $\underline{\mathbf{A}}$, dată de relația (6.157), în expresia densității de curent (6.155), se obține:

$$\underline{\mathbf{J}} = \frac{\underline{\gamma} \underline{I}_s}{2} \frac{\operatorname{ch} \underline{\gamma}x}{\operatorname{sh} \underline{\gamma} \frac{\Delta}{2}}. \quad (6.158)$$

Câmpul electric complex în interiorul plăcii este:

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{\underline{\mathbf{J}}}{\sigma} = \frac{\underline{\gamma} \underline{I}_s}{2\sigma} \frac{\operatorname{ch} \underline{\gamma}x}{\operatorname{sh} \underline{\gamma} \frac{\Delta}{2}}. \quad (6.159)$$

Din legea inducției electromagnetice

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \underline{\mathbf{E}} \end{vmatrix} = -\frac{d\underline{\mathbf{E}}}{dx} \mathbf{u}_y = -j\omega\mu_i \underline{\mathbf{H}} \quad (6.160)$$

se obține câmpul magnetic în interiorul plăcii:

$$\underline{H} = \frac{1}{j\omega\mu_i} \frac{d\underline{E}}{dx} = \frac{I_s}{2} \frac{\text{sh}\gamma x}{\text{sh}\gamma \frac{\Delta}{2}}. \quad (6.161)$$

Vectorul Poynting pe fața $x = \Delta/2$ a plăcii se calculează ținând seama de relațiile (6.159) și (6.161):

$$\underline{S}|_{x=\frac{\Delta}{2}} = \underline{E} \times \underline{H}^*|_{x=\frac{\Delta}{2}} = -\frac{\gamma I_s^2}{4\sigma} \frac{\text{ch}\gamma \frac{\Delta}{2}}{\text{sh}\gamma \frac{\Delta}{2}} \underline{u}_x. \quad (6.162)$$

Puterile activă P și reactivă Q pe unitatea de lungime și lățime a plăcii sunt egale cu părțile reală respectiv imaginară ale lui \underline{S} :

$$P_s = \frac{\alpha I_s^2}{4\sigma} \frac{\text{sh}\alpha\Delta + \sin\alpha\Delta}{\text{ch}\alpha\Delta - \cos\alpha\Delta}; \quad Q_s = \frac{\alpha I_s^2}{4\sigma} \frac{\text{sh}\alpha\Delta - \sin\alpha\Delta}{\text{ch}\alpha\Delta - \cos\alpha\Delta}. \quad (6.163)$$

Aproximația la efect pelicular slab. La valori mici ale argumentului $\frac{\Delta}{\delta}$, funcțiile hiperbolice pot fi approximate prin polinoame de grad n ale dezvoltărilor lor în serie. În aproximația de ordinul doi, rezultă:

$$\underline{J} \cong \frac{\gamma I_s}{2} \frac{1 + \left(\frac{\gamma x}{2}\right)^2}{\frac{\gamma \Delta}{2} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\gamma \Delta}{2}\right)^3} \cong \frac{I_s}{\Delta} \left[1 + j\alpha^2 \left(x^2 - \frac{\Delta^2}{2} \right) \right]; \quad (6.164)$$

$$\underline{H} \cong \frac{I_s}{2} \frac{\frac{\gamma x}{2} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\gamma x}{2}\right)^3}{\frac{\gamma \Delta}{2} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\gamma \Delta}{2}\right)^3} \cong \frac{I_s x}{\Delta} \left[1 + j\frac{\alpha^2}{3} \left(x^2 - \frac{\Delta^2}{4} \right) \right]. \quad (6.165)$$

Aproximația la efect pelicular net. La valori mari ale argumentului $\frac{\Delta}{\delta}$, funcțiile hiperbolice se înlocuiesc cu aproximațiile lor asimptotice, $\text{sh}x = \text{ch}x \cong \frac{1}{2} e^x$ și relațiile (6.158, 6.161) devin:

$$\underline{J} \cong \frac{\gamma I_s}{2} e^{-\gamma \left(\frac{\Delta}{2} - x\right)}; \quad \underline{H} \cong \frac{I_s}{2} e^{-\gamma \left(\frac{\Delta}{2} - x\right)}. \quad (6.166)$$

6.4.3. Efectul de proximitate

Curentul variabil în timp dintr-un conductor izolat se repartizează în acord cu efectul pelicular. Dacă în vecinătatea conductorului se găsesc alte conductoare parcurse de curenți variabili în timp, câmpul lor magnetic influențează repartiția densității curentului în conductorul dat. Modificarea densității curentului dintr-un conductor de câmpul magnetic inductoric stabilit din exteriorul acestuia se numește *efect de proximitate*.

a. Efectul de proximitate între două plăci paralele parcurse de curenți în același sens. Se consideră două plăci conductoare de extensie infinită în lungime și lățime și de grosime $\Delta/2$, dispuse paralel și parcurse în același sens de curenți sinusoidali în timp, având pe unitatea de lățime a fiecărei plăci intensitatea $\frac{i_s}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} I_s \sin \omega t$. Datorită extensiei infinite a plăcilor, mărimile câmpului electromagnetic depind numai de coordonata după grosimea plăcilor. În sistemul de coordonate cartezian cu planul yOz paralel cu fețele interioare ale plăcilor la jumătatea distanței dintre acestea și cu axa Ox normală pe plăci (fig. 6.8, a), densitatea de curent este $\underline{J} = \underline{J}(x) \underline{u}_y$. Aplicând legea circuitului magnetic în lungul curbei Γ_e , se obține:

$$\oint_{\Gamma_e} \underline{H} \, ds = 2 \underline{H}_e L_e = 2 L_e \frac{I_s}{2}, \quad (6.167)$$

respectiv

$$\underline{H}_e = \frac{I_s}{2}. \quad (6.168)$$

În exteriorul plăcilor câmpul magnetic este uniform și orientat după axa Oz . Procedând la fel pentru conturul Γ_i , se obține:

$$2 \underline{H}_i L_i = 0. \quad (6.169)$$

Prin urmare, în dielectricul dintre plăci câmpul magnetic este nul,

$$\underline{H}_i = 0. \quad (6.170)$$

Deoarece câmpul magnetic în dielectricul din afara plăcilor și între plăci este independent de distanța dintre acestea, soluția problemei este aceeași dacă plăcile sunt cu fețele lor interioare în contact (fig. 6.8, b). Sistemul celor două plăci în contact, fiecare de grosime $\Delta/2$ parcurse în același sens de curenții $I_s/2$, este identic cu o placă de grosime Δ parcursă de curentul I_s . Prin urmare, problema efectului de proximitate între cele două plăci se reduce la problema efectului pelicular în placa de grosime Δ parcursă de curentul I_s . Dacă se alege originea pentru coordonata x pe fața interioară a fiecăreia dintre plăci, densitatea de curent \underline{J} și câmpul magnetic

\underline{H} se calculează cu relațiile (6.158, 6.161), iar puterile activă și reactivă cu relațiile (6.163).

În figura 6.8 sunt reprezentate curbele $H(x)$ și $J(x)$; se observă că efectul de

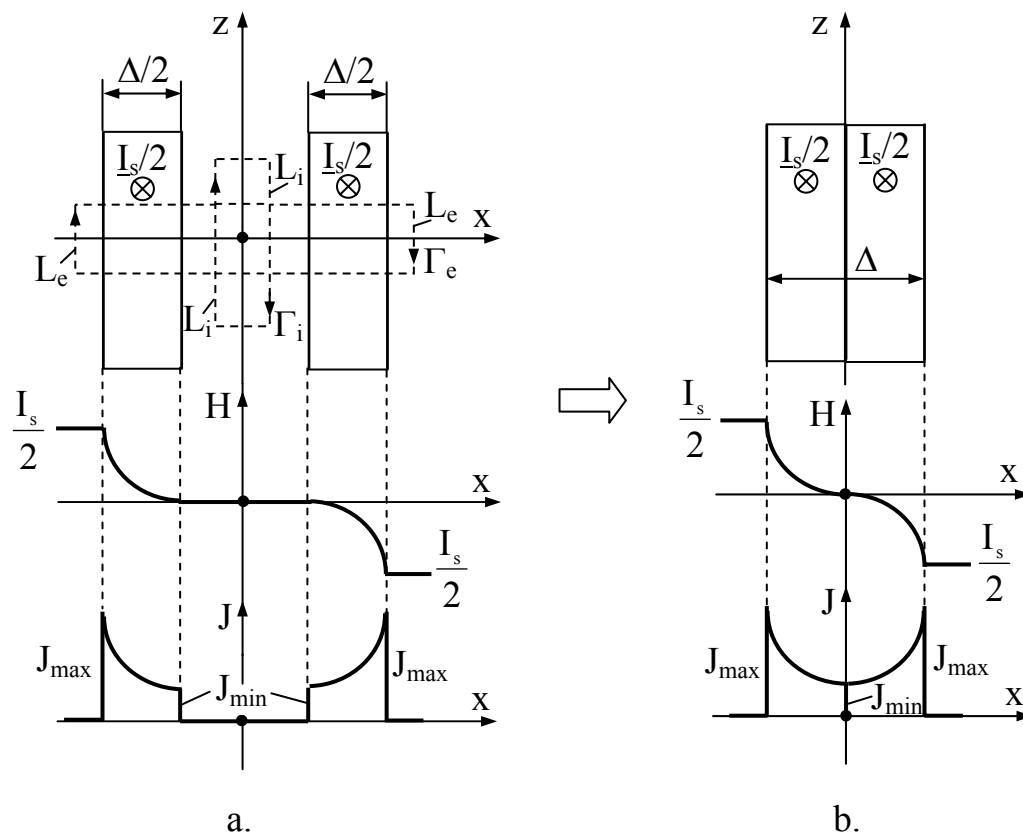


Fig. 6.8

proximitate pune în evidență refularea curentului spre fețele exterioare ale plăcilor.

b. Efectul de proximitate între două plăci paralele parcurse de curenți în sensuri opuse. Aplicând legea circuitului magnetic în lungul conturului Γ_e (fig. 6.9, a) rezultă:

$$2\underline{H}_e L_e = 0, \quad (6.171)$$

adică în exteriorul plăcilor câmpul magnetic este nul,

$$\underline{H}_e = 0. \quad (6.172)$$

Procedând la fel pentru conturul Γ_i , se obține:

$$\oint_{\Gamma_i} \underline{H} \, ds = 2\underline{H}_i L_i = 2L_i \frac{I_s}{2}, \quad (6.173)$$

respectiv,

$$\underline{H}_i = \frac{I_s}{2}. \quad (6.174)$$

Deoarece repartiția intensităților câmpurilor electric \underline{E}_i și magnetic \underline{H}_i este aceeași în ambele plăci, este suficient să se rezolve problema interioară numai pentru una din plăci. Dacă se alege originea sistemului de coordonate pe fața exterioară a oricăreia dintre plăci, problema efectului de proximitate este identică cu problema efectului pelicular în jumătatea plăcii de grosime Δ parcursă de curentul \underline{I}_s (v. par. 6.4.2, b și fig. 6.9, b). În figura 6.9 sunt reprezentate curbele $H(x)$ și $J(x)$; se

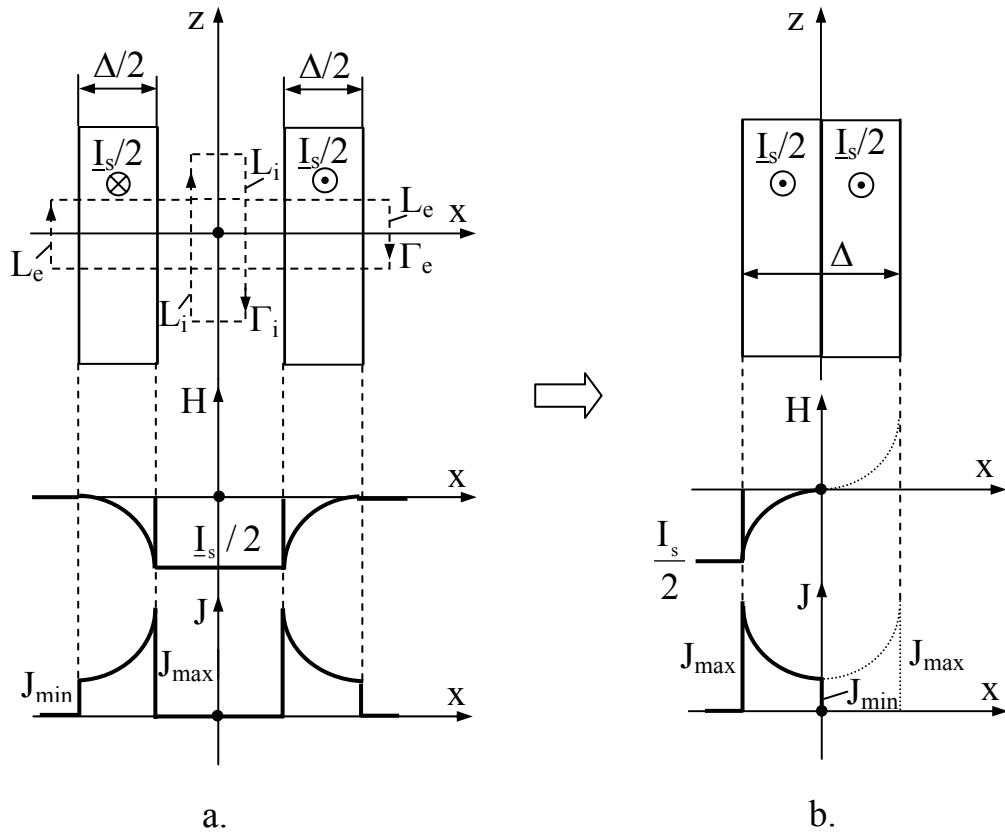


Fig. 6.9

observă că efectul de proximitate pune în evidență refularea curentului spre fețele interioare ale plăcilor.

6.4.4. Efectul Field

Curentul variabil în timp într-un conductor situat în creștătura efectuată într-un corp feromagnetic masiv are o repartiție a densității diferite de repartiția care ar exista în conductorul izolat și constituie *efectul Field*.

Se consideră o bară conductoare dreaptă cu secțiunea dreptunghiulară, parcursă axial de curent sinusoidal \underline{I} și situată în creștătura efectuată în semispațiul feromagnetic a cărui permeabilitate se consideră infinită (fig. 6.10). Datorită permeabilității infinite a blocului feromagnetic, liniile câmpului magnetic sunt pe întreaga înălțime a barei normale pe fețele creștăturii. Notând cu \underline{H}_i , respectiv \underline{H}_s intensitatea câmpului magnetic pe fața inferioară, respectiv superioară a creștăturii și aplicând legea circuitului magnetic pe curbele Γ_1 și Γ_2 , se obține:

$$\oint_{\Gamma_1} \underline{H} ds = \underline{H}_i a - \underline{H}_{Fe} a = 0; \quad \oint_{\Gamma_2} \underline{H} ds = \underline{H}_s a - \underline{H}_{Fe} a = \underline{I}. \quad (6.175)$$

Datorită permeabilității infinite a blocului feromagnetic, intensitatea câmpului magnetic în fier este nulă, $\underline{H}_{Fe} = 0$ și din relațiile (6.175) rezultă:

$$\underline{H}_i = 0, \quad \underline{H}_s = \frac{\underline{I}}{a}, \quad (6.176)$$

adică pe fața inferioară câmpul magnetic este nul și pe fața superioară este constant.

Se consideră o placă de extensie infinită în lungime și lățime de grosime $\Delta = 2h$ și parcursă de curentul $\underline{I}_s = \underline{I} \frac{2h}{ah} = \frac{2\underline{I}}{a}$ pe unitatea de lățime (fig. 6.11), bara

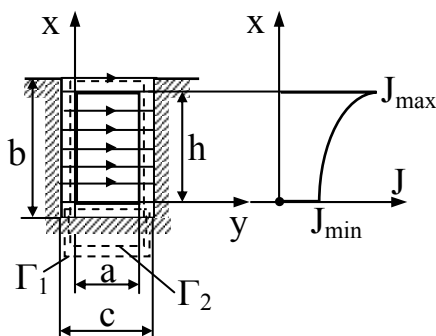


Fig. 6.10

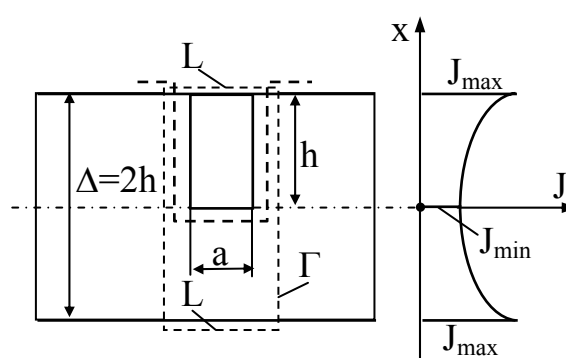


Fig. 6.11

dreptunghiulară din creștătură fiind numai o porțiune de lățime a și grosime $h = \Delta/2$. Din legea circuitului magnetic aplicată în lungul conturului Γ , rezultă :

$$2\underline{H}_e L = L\underline{I}_s, \quad (6.177)$$

respectiv,

$$\underline{H}_e = \frac{\underline{I}_s}{2} = \frac{a}{2} = \frac{\underline{I}}{a}. \quad (6.178)$$

În aceste condiții, din relațiile (6.176) și (6.178), rezultă că problema efectului Field în bară este identică cu problema efectului pelicular în placa de extensie infinită și mărimile \underline{J} și \underline{H} se calculează cu relațiile (6.158) și (6.161).

Din figura 6.10 se observă că densitatea de curent este mai mare spre fereastra creștăturii și mai mică spre fundul acesteia; la refulare netă, curentul se concentrează pe o fâșie de înălțime egală cu adâncimea de pătrundere, situată spre fața barei dinspre fereastra creștăturii.

6.4.5. Efectul de buclă

În conductoarele buclate, curentul variabil în timp are o repartiție diferită de cea a curentului continuu. Într-o spiră circulară groasă (fig. 6.12) curentul sinusoidal în timp se repartizează cu densitatea mai mare pe fața interioară și mai mică pe fața exterioară. Efectul de buclă intervine în instalațiile de încălzire interioară prin inducție în care conductorul care urmează a fi încălzit este situat în interiorul bobinei inductoare (fig. 6.13, a). Deoarece densitatea de curent este mai mare pe fața interioară a bobinei, se obține îmbunătățirea condițiilor de transfer a energiei.

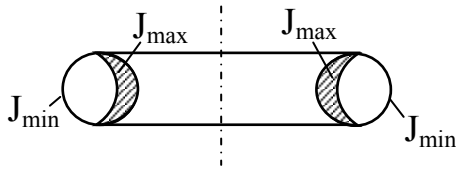


Fig. 6.12

În instalațiile de încălzire exterioară, în care corpul ce urmează a fi încălzit e situat în exteriorul spirei inductoare, efectul de buclă înrăutățește condițiile de transfer a căldurii. În figura 6.13, b este reprezentată încălzirea feței interioare a unui cilindru cu un inductor de forma unei spire; datorită efectului de buclă,

transferul energiei către fața cilindrului se înrăutățește o dată cu reducerea razei spirei. Repartiția densității de curent se poate îmbunătăți introducând spira într-o manta feromagnetică (fig. 6.13, c).

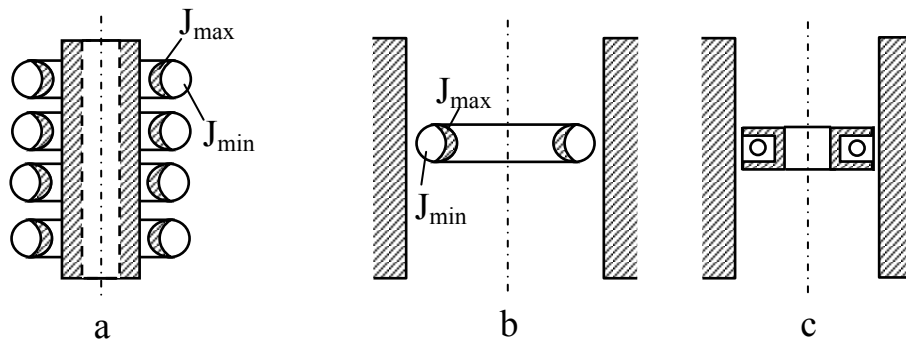


Fig. 6.13

Datorită efectului Field, curentul este refulat spre fețele exterioare ale spirei, compensând în acest fel efectul de buclă.

6.4.6. Efectul de ecranare electromagnetică

În regim electrostatic anularea într-un domeniu v_{Σ} a câmpului electrostatic produs din exteriorul suprafeței Σ , se obține prin metalizarea suprafeței; similar, o folie feromagnetică Σ de permeabilitate infinită anulează în domeniul v_{Σ} câmpul magnetic staționar produs din exteriorul lui Σ și constituie un ecran magnetic.

Fie un conductor masiv v_{Σ} situat în câmp magnetic variabil în timp produs din exteriorul conductorului (fig. 6.14, a). Repartiția curentilor turbionari induși în conductor, respectiv pătrunderea câmpului magnetic se poate analiza calitativ după modul de refulare al curentului. Efectul pelicular depinde de valorile raportului

$\rho_{\min} / \delta = \sqrt{\pi f \mu \sigma \rho_{\min}^2}$ (v. par. 6.4.2, a), unde ρ_{\min} este cea mai mică dintre razele de curbură ale suprafeței Σ . Odată cu creșterea raportului ρ_{\min} / δ , prin urmare, fie a lui f , μ , σ sau ρ_{\min} , mărimile câmpului electromagnetic în interiorul conductorului scad, iar la valori foarte mari ale acestora (refulare netă) câmpul magnetic și densitatea de curent sunt nule. În regim de refulare netă, pătrunderea câmpului electromagnetic în lungul normalei interioare, pentru orice punct de pe suprafața Σ are loc la fel ca în semispațiul conductor; prin urmare, dacă se consideră o folie conductoare având formă Σ și grosimea g egală cu aproximativ 3-4 ori ρ_{\min} , câmpul magnetic în interiorul foliei se anulează (fig. 6.14, b). În aceste condiții, folia

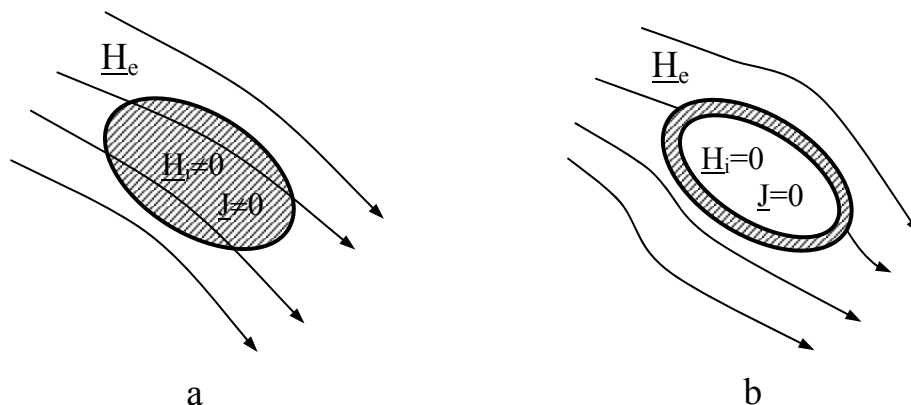


Fig. 6.14

conductorului Σ constituie un *ecran electromagnetic*.

Problema ecranării electromagnetice este o problemă de câmp electromagnetic în regim quasistationar, pătrunderea câmpului în domeniul ce urmează a fi ecranat depinzând în afară de f , μ , σ și de forma și dimensiunile ecranului, prin urmare de grosimea acestuia. Eficiența unui ecran din punctul de vedere al reducerii câmpului magnetic inductoric se apreciază cu mărimea numită factor de ecranare electromagnetică \underline{k}_e , definit de raportul dintre intensitatea câmpului magnetic în interiorul domeniului de ecranare \underline{H}_i și intensitatea câmpului magnetic din exteriorul domeniului de ecranat \underline{H}_e ,

$$\underline{k}_e = \frac{\underline{H}_i}{\underline{H}_e}. \quad (6.179)$$

6.4.7. Efectul de levitație electromagnetică

Un corp încărcat cu sarcină electrică, sau polarizat electric, respectiv magnetizat, sub acțiunea exclusiv a forțelor electrostatice respectiv magnetostatice, nu poate fi menționat într-o poziție de echilibru stabil. În schimb, prin introducerea unui conductor masiv în câmp magnetic variabil în timp, se poate determina cel puțin o regiune în câmp, în care rezultanta forțelor de interacțiune dintre curenții turbionari și câmpul inductoric să fie egală cu forța de gravitație. În acest fel, conductorul în stare de echilibru, “*plutește în câmp magnetic exterior*”, fenomen numit de *levitație electromagnetică*.