5

LEGILE ŞI TEOREMELE GENERALE ALE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

Din punctul de vedere al relaţiei cauză – efect, legile sunt fie *legi de stare* şi se exprimă prin relaţii între mărimi simultane, fie *legi de evoluţie* şi se exprimă prin relaţii în care intervin şi derivate în raport cu timpul ale mărimilor de stare. Dacă pentru enunţarea lor nu sunt, respectiv sunt necesare mărimi de material, legile se clasifică în *legi generale* şi *legi de material*.

5.1. LEGILE DE STARE ALE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

Legile de stare ale câmpului electromagnetic sunt:

- legea dependenţei dintre inducţie, intensitate şi polarizaţie în câmp electric;
- legea polarizaţiei electrice temporare;
- legea fluxului electric;
- legea conducţiei electrice;
- legea electrolizei;
- legea transformării energiei în conductoare parcurse de curent electric de conducţie;
- legea dependenţei dintre inducţie, intensitate şi magnetizaţie în câmp magnetic;
- legea magnetizaţiei temporare;
- legea fluxului magnetic.

5.1.1. Legea dependenţei dintre inducţie, intensitate şi polarizaţie în câmp electric

Relaţia (2.86) stabilită pentru câmpul electrostatic se generalizează pentru câmpul electromagnetic variabil în timp, independent de starea cinematică a corpurilor şi constituie *legea dependenţei dintre inducţie, intensitate şi polarizaţie în câmp electric*: *în fiecare punct din câmp şi în fiecare moment, inducţia electrică* **D** *este egală cu suma dintre intensitatea câmpului electric* **E** *multiplicată cu permitivitatea vidului* ε_0 *şi polarizaţia* **P**:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}(\mathbf{r},t) \ . \tag{5.1}$$

Deoarece în ecuaţie nu intervin mărimi de material, legea de stare a dependenţei dintre **D, E** şi **P** este o lege generală a câmpului electromagnetic.

Deşi ecuaţia (5.1) constituie generalizarea relaţiei (2.86), condiţiile de determinare ale mărimilor **D** şi **E** sunt diferite. Câmpul electrostatic este univoc determinat în fiecare punct de divergenţa inducţiei electrice şi de condiţiile pe frontieră, rotorul intensităţii câmpului electrostatic fiind nul (2.237). În regim variabil rotorul lui **E** este diferit de zero (v. par. 5.2.1).

5.1.2. Legea polarizaţiei electrice temporare

Dependenţa locală dintre componenta temporară a polarizaţiei electrice şi intensitatea câmpului electric **E**, constatată experimental în regim electrostatic (v. par. 2.8), se verifică şi în regim variabil în timp şi constituie legea polarizaţiei electrice temporare: *în fiecare punct dintr-un dielectric şi în fiecare moment, polarizaţia electrică temporară* $\mathbf{P}_t$ *este funcţie de intensitatea câmpului electric* **E**:

$$\mathbf{P}_t(\mathbf{r},t)=\mathbf{P}_t[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)]. \qquad (5.2)$$

Deoarece această relaţie caracterizează din punctul de vedere al polarizaţiei un anumit material, legea de stare a polarizaţiei electrice temporare este o *lege de material*. După modul explicit al dependenţei dintre $\mathbf{P}_t$ şi **E**, dielectricii se clasifică în: izotropi sau anizotropi, liniari sau neliniari, cu sau fără histerezis.

a. Dielectrici liniari şi izotropi. Un material dielectric este izotrop dacă sub acţiunea unui câmp electric având orice orientare în corp, se polarizează temporar în direcţia câmpului şi este liniar dacă local polarizaţia temporară instantanee $\mathbf{P}_t(\mathbf{r},t)$ este proporţională cu intensitatea instantanee a câmpului electric $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$:

$$\mathbf{P}_t(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0\,\chi_e(\mathbf{r})\mathbf{E}(r,t)\,. \qquad (5.3)$$

Mărimea adimensională χ_e se numeşte *susceptivitate electrică*. În general, mărimea χ_e deşi independentă de **E** depinde de condiţii neelectrice (temperatură, presiune, etc.).

Dacă materialul dielectric este fără polarizaţie permanentă ($\mathbf{P}_p = 0$), atunci ecuaţia (5.1) devine:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\varepsilon_0\,\chi_e(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0[1+\chi_e(\mathbf{r})]\mathbf{E}(\mathbf{r},t). \qquad (5.4)$$

Mărimea adimensională

$$1+\chi_e(\mathbf{r})=\varepsilon_r(\mathbf{r}) \qquad (5.5)$$

se numeşte *permitivitate relativă*.

Înlocuind (5.5) în (5.4) se obţine:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0\,\varepsilon_r(\mathbf{r})\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\varepsilon(\mathbf{r})\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\ , \qquad (5.6)$$

unde

$$\varepsilon(\mathbf{r})=\varepsilon_0\,\varepsilon_r(\mathbf{r}) \qquad (5.7)$$

este *permitivitatea absolută* a materialului (sau *constanta dielectrică*).

După modul în care analiza la scară microscopică pune în evidență fenomenele de polarizare ale dielectricilor, se disting:

- materiale *diaelectrice*, cu o susceptivitate χ_e foarte mică şi practic independent de temperatură, permitivitatea lor relativă fiind aproximativ egală cu unitatea ($\varepsilon_r \cong 1$), dar subunitară;
- materialele *paraelectrice* cu o susceptivitate χ_e apreciabilă, variabilă cu temperatura, permitivitatea lor relativă ε_r fiind supraunitară.

b. Dielectrici liniari şi anizotropi. Polarizația electrică temporară a unor dielectrici anizotropi cum sunt cristalele depinde de direcția câmpului electric. Dacă se aplică unui cristal dielectric un câmp electric într-o direcție oarecare, polarizația lui temporară are în general o altă direcție. Într-un sistem de coordonate carteziene, componentele P_{tx}, P_{ty} şi P_{tz} sunt funcții liniare de componentele E_x, E_y şi E_z:

$$\begin{aligned} P_{t_x} &= \varepsilon_0\chi_{exx}E_x + \varepsilon_0\chi_{exy}E_y + \varepsilon_0\chi_{exz}E_z\,; \\ P_{ty} &= \varepsilon_0\chi_{eyx}E_x + \varepsilon_0\chi_{eyy}E_y + \varepsilon_0\chi_{eyz}E_z\,; \\ P_{tz} &= \varepsilon_0\chi_{ezx}E_x + \varepsilon_0\chi_{ezy}E_y + \varepsilon_0\chi_{ezz}E_z\,, \end{aligned} \tag{5.8}$$

adică,

$$\mathbf{P}_t = \varepsilon_0\,\overline{\overline{\chi_e}}\,\mathbf{E}, \tag{5.9}$$

în care $\overline{\overline{\chi_e}}$ este tensorul susceptivității, având matricea componentelor simetrică ($\chi_{ejk}=\chi_{ekj}$),

$$[\overline{\overline{\chi_e}}] = \begin{bmatrix} \chi_{exx} & \chi_{exy} & \chi_{exz} \\ \chi_{eyx} & \chi_{eyy} & \chi_{eyz} \\ \chi_{ezx} & \chi_{ezy} & \chi_{ezz} \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

Din relațiile (5.1) şi (5.9) rezultă:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0[\overline{\overline{1}} + \overline{\overline{\chi_e}}]\mathbf{E} = \overline{\overline{\varepsilon}}\,\mathbf{E}, \tag{5.11}$$

unde $\overline{\overline{\varepsilon}}$ este tensorul simetric al permitivității electrice a cristalului,

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \varepsilon_0[\overline{\overline{1}} + \overline{\overline{\chi_e}}]. \tag{5.12}$$

Există trei direcții după care componentele inducției electrice D_1, D_2 şi D_3 sunt paralele cu componentele intensității câmpului electric E_1, E_2 şi E_3:

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1\,,\ D_2 = \varepsilon_2 E_2\,,\ D_3 = \varepsilon_3 E_3. \tag{5.13}$$

Direcțiile după care sunt satisfăcute relațiile (5.13) se numesc *axe principale de polarizare ale cristalului*.

c. Dielectrici neliniari. Materialele dielectrice neliniare sunt caracterizate printr-o dependență neliniară dintre polarizația lor temporară $\mathbf{P}_t$ şi intensitatea câmpului electric **E**. Principalele substanțe din această clasă, numite *feroelectrice*, cum sunt titanatul de bariu, bisulfitul de amoniu etc. se polarizează intens şi ireversibil, punând în evidență fenomenul de *histerezis*. Curbele care reprezintă grafic variația polarizației în funcție intensitatea câmpului electric se numesc *curbe de polarizare*, sau *caracteristici de polarizare*. Dacă materialul este inițial nepolarizat, punctul de funcționare se deplasează pe curba OP_m (fig. 5.1) numită *curbă de primă polarizare*. Dacă din punctul P_m al curbei de primă polarizare se reduce treptat intensitatea câmpului electric, curba care se obține nu coincide cu ramura OP_m. La anularea câmpului, polarizația este nenulă, numită *polarizație remanentă* P_r, iar pentru anularea ei este necesară aplicarea unui câmp în sens opus E_c , numit *câmp electric coercitiv*. În continuare, punctul de funcționare se deplasează pe curba $–E_c$, $-P_m$ şi apoi prin valori crescătoare pe curba $–P_m$, $-P_r$, E_c, P_m. Curba pe care o descrie punctul de funcționare şi care corespunde câmpului electric între doua valori $\pm E_m$, se numeşte *ciclu de histerezis electric*. Pe durata unui ciclu de histerezis energia electrică se transformă în căldură (v. par. 5.3.2).

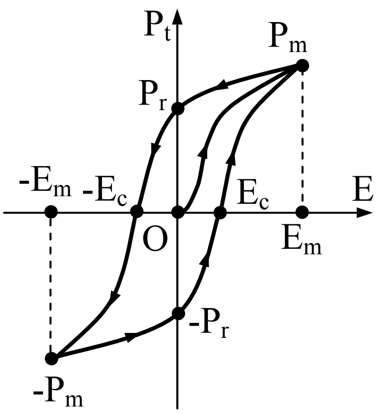


Fig. 5.1

d. Vâscozitatea electrică. La viteze mari de variație în timp, polarizația electrică temporară a unor dielectrici nu depinde numai de intensitatea câmpului electric, ci şi de transformarea care a precedat starea considerată. Acest fenomen de polarizare cu efecte ereditare este numit *vâscozitate electrică* şi este însoțit de pierderi de energie.

O aproximare a dependenței polarizației de intensitatea câmpului electric este dată de formula lui Boltzmann:

$$P_t(t) = \varepsilon_0 \int_{t_0}^{t} \chi_e(\tau) E(t-\tau) d\tau, \tag{5.14}$$

în care susceptivitatea $\chi_e(\tau)$ intervine ca funcție ereditară de ponderare a valorilor anterioare ale polarizației, contribuțiile la polarizația din momentul t fiind cu atât mai mici cu cât τ este mai îndepărtat de t.

5.1.3. Legea fluxului electric

Experiența arată că fluxul electric printr-o suprafață închisă este în general nenul dacă în domeniul delimitat de suprafața respectivă este localizată sarcină electrică. Acest fapt este în concordanță cu observația că în vecinătatea corpurilor încărcate cu sarcini electrice apare întotdeauna un câmp electric.

Relația stabilită între mărimile corespunzătoare are un caracter legic general, constituind *legea fluxului electric*. Această lege este independentă de starea cinematică a corpurilor şi se enunță prin generalizarea teoremei fluxului electric demonstrată pentru câmpul electrostatic (v. par. 2.9.1), fiind valabilă pentru orice regim al câmpului electromagnetic.

a. Forma globală (integrală) a legii fluxului electric. În forma integrală, legea afirmă: *fluxul electric printr-o suprafață închisă* Σ *este în fiecare moment egal cu sarcina electrică* q_Σ *a corpurilor din interiorul suprafeței*,

$$\Psi_\Sigma = \oiint_\Sigma \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,dA = q_\Sigma . \tag{5.15}$$

Deoarece în ecuație nu intervin mărimi de material, legea fluxului electric este o lege generală şi de stare a câmpului electromagnetic.

Dacă sarcina electrică $q_\Sigma = 0$, rezultă:

$$\Psi_\Sigma = 0. \tag{5.16}$$

Din anularea fluxului electric nu rezultă şi anularea inducției electrice. În general, în acest caz sarcinile electrice din interiorul suprafeței Σ alcătuiesc un sistem complet de sarcini; integrala efectuată pe porțiunile de suprafață prin care liniile de câmp ale inducției electrice intră în suprafața Σ este egală şi de semn opus cu integrala de suprafață pe porțiunile suprafeței prin care liniile de câmp ies din Σ.

b. Forma locală (diferențială) a legii fluxului electric. Dacă se presupune că sarcina electrică q_Σ se repartizează cu densitatea de volum ρ_v, rezultă:

$$q_\Sigma = \iiint_{v_\Sigma} \rho_v\,dv . \tag{5.17}$$

Aplicând teorema divergenței integralei de suprafață din relația (5.15), se obține:

$$\Psi_\Sigma = \oiint_\Sigma \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,dA = \iiint_{v_\Sigma} \mathrm{div}\mathbf{D}\,dv . \tag{5.18}$$

Prin identificarea integranzilor din relațiile (5.17) şi (5.18) se obține forma locală a legii fluxului electric: *în fiecare punct din câmp divergența inducției electrice instantanee este egală cu densitatea de volum a sarcinii electrice instantanee*:

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho_v . \tag{5.19}$$

Punctele din spațiul câmpului **D** în care div**D** $\neq 0$ se numesc *sursele câmpului* **D**. În consecință, sursele câmpului se află numai în acele puncte ale spațiului unde există sarcini electrice. Dacă div**D** = 0 (deci $\rho_V = 0$) se spune că în punctele respective câmpul nu are surse.

Din relația (5.19) rezultă că liniile de câmp electric sunt linii deschise care diverg din sursele pozitive ale câmpului (de divergență pozitivă) şi converg în sursele negative ale câmpului (de divergență negativă).

c. Forma locală a legii fluxului electric pe suprafețe de discontinuitate. Relația (5.19) este valabilă numai în domeniile în care inducția electrică este funcție continuă de punct. Fie S_d o suprafață de discontinuitate a inducției electrice, care separă domeniile 1 şi 2 în care inducțiile $\mathbf{D}_1$ şi $\mathbf{D}_2$ sunt funcții continue de punct (fig. 2.24). Dacă se notează cu ρ_A densitatea de suprafață a sarcinii electrice pe suprafața S_d, rezultă (2.103):

$$\rho_A = D_{2n} - D_{1n}, \tag{5.20}$$

Din relația (5.20) rezultă că pe suprafața de separație S_d, densitatea de suprafață a sarcinii electrice ρ_A este egală cu diferența componentelor normale ale inducției electrice. Relația (5.20) constituie forma *locală a legii fluxului electric pe suprafețe de discontinuitate*.

Dacă densitatea de suprafață a sarcinii electrice ρ_A pe suprafața S_d este nulă, rezultă:

$$D_{1n} = D_{2n}, \tag{5.21}$$

adică *pe suprafața de discontinuitate neîncărcată cu sarcină electrică, componentele normale ale inducției electrice se conservă*.

5.1.4. Legea conducției electrice

Această lege stabileşte dependența locală şi instantanee dintre intensitatea câmpului electric $\mathbf{E}$ şi densitatea curentului electric de conducție $\mathbf{J}$. Deoarece dependența dintre $\mathbf{J}$ şi $\mathbf{E}$, în general neliniară, este specifică materialului şi se stabileşte în valori instantanee, legea conducției electrice este o *lege de stare* şi *de material*.

a. Forma locală a legii conducției electrice.

Conductoare liniare, izotrope şi omogene. Experiența arată relațiile (3.73), stabilite în regim staționar, sunt valabile şi în regim variabil în timp pentru conductoarele de prima speță, independent de starea lor cinematică până la frecvențe de ordinul 10^{13} Hz. Generalizarea relațiilor (3.73) constituie *legea conducției electrice (legea lui Ohm) sub formă locală*: *în fiecare punct dintr-un conductor liniar, omogen şi izotrop, de prima speță, independent de starea lui cinematică, densitatea curentului electric de conducție este proporțională cu intensitatea câmpului electric:*

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{J}(\mathbf{r},t) \tag{5.22}$$

Conductoare neliniare, izotrope şi omogene. Pentru aceste conductoare formele locale (5.22) ale legii nu sunt satisfăcute. Dependența dintre densitatea curentului electric de conducție şi intensitatea câmpului electric

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t)=\mathbf{J}[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)] \tag{5.23}$$

este neliniară.

Conductoare liniare, anizotrope şi omogene. În conductoarele anizotrope, cum sunt cristalele, orientarea vectorului **J** nu este aceeaşi cu cea a vectorului **E**. Există însă trei direcții numite *axe principale de conducție electrică*, în care dacă materialul este liniar, densitățile de curent J_1, J_2, J_3, şi intensitățile câmpului electric E_1, E_2, E_3 satisfac fiecare separat legea conducției:

$$J_1 = \sigma_1 E_1\ ;\ \ J_2 = \sigma_2 E_2\ \ ; J_3 = \sigma_3 E_3. \tag{5.24}$$

Unei orientări oarecare a câmpului electric, îi corespund componentele J_x, J_y, J_z, funcții liniare de componentele E_x, E_y, E_z:

$$J_x = \sigma_{xx} E_x + \sigma_{xy} E_y + \sigma_{xz} E_z;$$

$$J_y = \sigma_{yx} E_x + \sigma_{yy} E_y + \sigma_{yz} E_z;$$

$$J_z = \sigma_{zx} E_x + \sigma_{zy} E_y + \sigma_{zz} E_z,$$

adică,

$$\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E}, \tag{5.25}$$

unde $\overline{\overline{\sigma}}$ este tensorul conductivității.

Conductoare liniare, izotrope şi neomogene. În afară de câmpul electric stabilit de corpurile încărcate cu sarcină electrică sau polarizate electric, câmpul electric mai poate fi produs de fluxul magnetic variabil în timp, numit *câmp electric indus* sau *solenoidal* $\mathbf{E}_s$ (v. par. 5.2.1) şi de neomogenități de natură neelectrică în conductoarele de prima sau de a doua speță, numit *câmp electric imprimat* $\mathbf{E}_i$ (v. par. 3.2). În general, intensitatea câmpului electric, numită *în sens larg* $\mathbf{E}_l$, este egală cu suma a trei termeni,

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i\ , \tag{5.26}$$

unde:

- $\mathbf{E}_c$ este *intensitatea câmpului electric coulombian* produs de repartiția instantanee a sarcinilor electrice;
- $\mathbf{E}_s$ – *intensitatea câmpului electric indus (solenoidal)* produs de fluxul magnetic variabil în timp;
- $\mathbf{E}_i$ – *intensitatea câmpului electric imprimat*, de natură neelectrică, care depinde numai de starea locală neelectromagnetică a substanței considerate şi nu este determinat de repartiția sarcinilor electrice sau de fenomenul de inducție electromagnetică.

Diferența dintre intensitățile în sens larg $\mathbf{E}_l$ şi imprimat $\mathbf{E}_i$ se numeşte *intensitate a câmpului electric în sens restrâns* **E** sau, mai simplu, *intensitatea câmpului electric*,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_l - \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_s \,. \tag{5.27}$$

Liniile câmpului vectorial **E**, numite pe scurt linii de câmp electric, sunt liniile la care vectorul **E** este tangent în fiecare punct.

Se verifică experimental că în toate cazurile în care intensitatea câmpului electric imprimat este diferită de zero, $\mathbf{E}_i \neq 0$, relațiile (5.22) se modifică astfel:

$$\mathbf{J} = \sigma\,(\mathbf{E}+\mathbf{E}_i)\ ;\ \mathbf{E} + \mathbf{E}_i = \rho\,\mathbf{J}. \tag{5.28}$$

Relațiile (5.28) reprezintă forma generală a legii conducției electrice: *în interiorul unui conductor liniar, izotrop şi neomogen, intensitatea câmpului electric în sens larg,* $\mathbf{E}_l = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i = \mathbf{E} + \mathbf{E}_i$, *este egală cu produsul dintre rezistivitatea* ρ *şi densitatea curentului electric de conducție* **J**.

Experiența arată că în conductoarele de speța a doua, relațiile (5.28) sunt verificate practic numai în regim staționar, iar în conductoarele de prima speță ele sunt valabile până la frecvențe de ordinul 10^{13} Hz.

5.1.5. Legea electrolizei

Această lege se referă la conductoarele de a doua speță în care trecerea curentului electric de conducție este însoțită şi de reacții chimice.

Dacă se introduc într-un vas cu apă distilată doi electrozi de metal conectați la o sursă de curent continuu, se constată că prin circuit nu trece curent electric de conducție. Dacă însă se dizolvă un acid, o bază sau o sare în mediul de soluție, prin circuit trece curent electric a cărui intensitate creşte cu concentrația substanței dizolvate. În cazul în care substanța dizolvată este, de exemplu, HCl, la electrodul negativ se dezvoltă hidrogen, iar la electrodul pozitiv se dezvoltă Cl.

În general, la trecerea unui curent electric printr-un electrolit topit sau printr-o soluție electrolitică, la electrodul negativ numit catod apare hidrogenul sau metalul din soluție, iar la electrodul pozitiv numit anod apare un radical sau un alt element. Elementele eliberate la electrozi pot reacționa chimic cu electrozii sau cu soluția.

Masa elementului dintr-o anumită combinație chimică care apare la electrod este proporțională cu raportul dintre masa atomică a elementului, A şi valența lui n_v, numit echivalent electrochimic A/n_v al elementului în combinația chimică respectivă.

Legea electrolizei stabilită de Faraday se enunță astfel: *masa de substanță depusă în unitatea de timp* dm/dt *la unul din electrozii unei băi electrolitice parcursă de curent de conducție, este egală cu produsul dintre intensitatea curentului electric i şi raportul dintre echivalentul electrochimic* A/n_v *prin constanta universală a lui Faraday* F_0,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{A}{n_v F_0}\, i\,, \tag{5.29}$$

unde F_0 = 96490 coulombi.

În intervalul de timp t, masa de substanță depusă este:

$$m = \frac{A}{n_v F_0}\int_0^t i\,dt = \frac{A\,q}{n_v\,F_0}\ , \qquad (5.30)$$

unde $q = \int_0^t i\,dt$ este sarcina electrică.

Echivalentul electrochimic al substanței fiind o mărime de material, legea electrolizei este o lege de material.

5.1.6. Legea transformării energiei în conductoare parcurse de curent electric de conducție

Experiența dovedeşte că procesul de conducție electrică este însoțit de dezvoltare de căldură. De asemenea, în cazul în care conductorul este sediul unui câmp electric imprimat, are loc un schimb reversibil de energie între sursa de câmp electric imprimat şi câmpul electromagnetic. Toate aceste transformări se exprimă cantitativ prin legea transformării energiei în conductoare parcurse de curent electric de conducție.

a. Forma locală a legii transformării energiei în conductoare parcurse de curent electric de conducție. Experiența arată că relația (3.82), stabilită în regim staționar, este valabilă şi în regim variabil în timp, pentru orice conductor omogen sau neomogen, izotrop sau anizotrop, liniar sau neliniar şi independent de starea lui cinematică. Prin generalizare se obține legea transformării energiei în conductoare parcurse de curent electric de conducție: *puterea instantanee pe unitatea de volum* $p_J(\mathbf{r},t)$ *este egală cu produsul scalar dintre intensitatea instantanee a câmpului electric* $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ *şi densitatea instantanee de curent* $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$,

$$p_J(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\mathbf{J}(\mathbf{r},t). \qquad (5.31)$$

Conductoare liniare, izotrope şi omogene. Vectorii **E** şi **J** fiind paraleli şi ținând seama de relațiile (5.22), relația (5.31) devine:

$$p_J(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{J}^2(\mathbf{r},t) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r},t). \qquad (5.32)$$

Rezultă că densitatea de volum a puterii este pozitivă şi reprezintă energia electromagnetică transformată ireversibil în unitatea de volum şi unitatea de timp în căldură prin *efect electrocaloric* (efect Joule-Lenz).

Conductoare liniare, izotrope şi neomogene. Ținând seama de forma locală a legii conducției electrice în conductoare liniare, izotrope şi neomogene (5.28), rezultă:

$$\mathbf{E} = \rho\,\mathbf{J} - \mathbf{E}_i. \qquad (5.33)$$

şi relația (5.31) devine:

$$p_J = \mathbf{E}\,\mathbf{J} = \rho\,\mathbf{J}^2 - \mathbf{E}_i\,\mathbf{J}\,. \tag{5.34}$$

Termenii din relația (5.34) au următoarele semnificații:

- Termenul $\rho\,\mathbf{J}^2$ este strict pozitiv şi reprezintă densitatea de volum a puterii cedată local de câmpul electromagnetic conductoarelor şi transformată ireversibil în căldură prin *efect electrocaloric* (efect Joule-Lenz);
- Termenul $\mathbf{E}_i\,\mathbf{J}$ reprezintă densitatea de volum a puterii schimbate de câmpul electromagnetic cu sursele de câmp electric imprimat; ea simbolizează transformările reversibile ale energiei electromagnetice în alte forme de energie şi poate fi pozitivă sau negativă. În conductoarele de prima speță, respectiv la suprafața de contact a două conductoare de prima speță, termenul $-\mathbf{E}_i\,\mathbf{J} > 0$ corespunde energiei electromagnetice transformate în unitatea de volum şi unitatea de timp prin dezvoltare de căldură prin efecte directe Thomson şi Peltier; termenul $-\mathbf{E}_i\,\mathbf{J} < 0$ corespunde energiei interioare a conductorului (sub formă de energie electrică) transformată prin consum de căldură prin efecte inverse Thomson şi Peltier. În conductoarele de a doua speță sau la suprafața lor de contact cu conductoarele de prima speță, termenul $-\mathbf{E}_i\,\mathbf{J} > 0$ corespunde energiei electromagnetice în unitatea de volum şi în unitatea de timp, transformată în energie chimică, iar termenul $-\mathbf{E}_i\,\mathbf{J} < 0$ corespunde energiei chimice transformată în energie electromagnetică.

Conductoare liniare, anizotrope şi omogene. Deoarece în conductoarele liniare, omogene şi anizotrope conductivitatea şi rezistivitatea sunt mărimi tensoriale, rezultă:

$$p_J = \overline{\overline{\rho}}\,J^2(\mathbf{r},t) = \overline{\overline{\sigma}}\,E^2(\mathbf{r},t). \tag{5.35}$$

5.1.7. Legea dependenței dintre inducție, intensitate şi magnetizație în câmp magnetic

Relația (4.182) stabilită pentru câmpul magnetic staționar şi cvasistaționar se generalizează pentru câmpul electromagnetic variabil în timp, independent de starea cinematică a corpurilor şi constituie legea dependenței dintre inducție, intensitate şi magnetizație: *în fiecare punct din câmp şi în fiecare moment, independent de starea cinematică a corpurilor, inducția magnetică* **B** *este egală cu suma multiplicată cu permeabilitatea vidului* μ_0 *dintre intensitatea câmpului magnetic* **H** *şi magnetizația* **M**,

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \tag{5.36}$$

Deoarece în ecuație nu intervin mărimi de material, legea dependenței dintre **B**, **H** şi **M** este o lege generală şi de stare a câmpului electromagnetic.

Corespunzător se generalizează şi relația (4.141):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_t(\mathbf{H}) + \mathbf{M}_p. \tag{5.37}$$

5.1.8. Legea magnetizației temporare

Dependența locală dintre componenta temporală a magnetizației $\mathbf{M}_t$ şi intensitatea câmpului magnetic **H,** constatată experimental în regim staționar (v. par. 4.5.2), se verifică şi în regim variabil în timp şi constituie legea magnetizației temporare: *în fiecare punct din corp şi în fiecare moment, magnetizația temporară este funcție de intensitatea câmpului magnetic*,

$$\mathbf{M_t}(\mathbf{r},t) = \mathbf{M_t}[\mathbf{H}(\mathbf{r},t)]. \tag{5.38}$$

Deoarece relația (5.38) caracterizează materialul, legea magnetizației temporare este o lege de stare şi de material a câmpului electromagnetic. După modul explicit al dependenței (5.38), materialele se clasifică în: izotrope sau anizotrope, liniare sau neliniare cu sau fără histerezis.

a. Materiale magnetice liniare şi izotrope. Un material magnetic este izotrop dacă sub acțiunea unui câmp magnetic având orice orientare în corp se magnetizează temporar în direcția câmpului şi este liniar dacă local magnetizația temporară instantanee $\mathbf{M}_t(\mathbf{r},t)$ este proporțională cu intensitatea instantanee a câmpului magnetic $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$:

$$\mathbf{M}_t(\mathbf{r},t) = \chi_m \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\ . \tag{5.39}$$

Mărimea adimensională χ_m se numeşte *susceptivitate magnetică*.

Dacă materialul este fără magnetizației permanentă, $\mathbf{M}_p = 0$, legea legăturii dintre **B**, **H** şi **M** (5.36) devine:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0[\mathbf{H}(\mathbf{r},t) + \mathbf{M_t}(\mathbf{r},t)] = \mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r},t) + \mu_0\chi_m\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}(\mathbf{r},t), \tag{5.40}$$

unde mărimea adimensională :

$$1+\chi_m = \mu_r \tag{5.41}$$

se numeşte *permeabilitate relativă* a materialului.
Rezultă:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0\mu_r\, \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mu\mathbf{H}(\mathbf{r},t), \tag{5.42}$$

unde $\mu = \mu_0\mu_r$ este *permeabilitatea absolută* a materialului.

După comportarea în câmp magnetic, materialele magnetice liniare se împart în *diamagnetice* şi *paramagnetice*. Materialele diamagnetice au susceptivitatea magnetică χ_m foarte mică, negativă şi practic independentă de temperatură. Din această categorie fac parte unele metale (Au, Ag, Cu, Pb etc.), apa, alcoolul, hidrogenul etc. Introduse într-un câmp magnetic, substanțele diamagnetice sunt deplasate spre zonele de câmp mai slab, permeabilitatea lor relativă fiind subunitară (aproximativ egală cu unitatea);

Materialele paramagnetice au susceptivitatea magnetică χ_m pozitivă şi invers proporțională cu temperatura. Materialele paramagnetice sunt unele metale (Al, Cr, K, Na, etc), aerul, oxigenul etc. Introduse în câmp magnetic, substanțele paramagnetice sunt atrase în regiunile cu câmp mai intens, deoarece au permeabilitatea magnetică relativă μ_r sensibil supraunitară.

b. Materiale magnetice liniare şi anizotrope. Magnetizaţia temporală a materialelor anizotrope cum sunt cristalele depinde de direcţia şi sensul câmpului magnetic. Dacă se introduce un cristal într-un câmp magnetic, magnetizaţia lui temporară are în general altă direcţie. Într-un sistem cartezian de coordonate, componentele magnetizaţiei temporare M_{tx}, M_{ty}, M_{tz} sunt funcţii liniare de componentele intensităţii câmpului magnetic H_x, H_y, H_z:

$$\begin{aligned} M_{tx} &= \chi_{mxx}\cdot H_x + \chi_{mxy}\cdot H_y + \chi_{mxz}\cdot H_z, \\ M_{ty} &= \chi_{myx}\cdot H_x + \chi_{myy}\cdot H_y + \chi_{myz}\cdot H_z, \\ M_{tz} &= \chi_{mzx}\cdot H_x + \chi_{mzy}\cdot H_y + \chi_{mzz}\cdot H_z \end{aligned} \tag{5.43}$$

Relaţiile (5.43) se pot scrie şi sub forma:

$$\mathbf{M}_t = \overline{\overline{\chi_m}}\,\mathbf{H}, \tag{5.44}$$

unde $\overline{\overline{\chi_m}}$ este tensorul permeabilităţii.
Din relaţiile (5.36) şi (5.44), rezultă:

$$\mathbf{B} = \mu_0\left(\overline{\overline{1}} + \overline{\overline{\chi_m}}\right)\mathbf{H} = \overline{\overline{\mu}}\,\mathbf{H}, \tag{5.45}$$

unde $\overline{\overline{\mu}}$ este tensorul permeabilităţii materialului.

Există trei direcţii după care componentele inducţiei magnetice B_1, B_2, şi B_3 sunt paralele cu componentele intensităţii câmpului magnetic H_1, H_2, şi H_3:

$$B_1 = \mu_1 H\ ;\ B_2 = \mu_2 H_2\ ;\ B_3 = \mu_3 H_3. \tag{5.46}$$

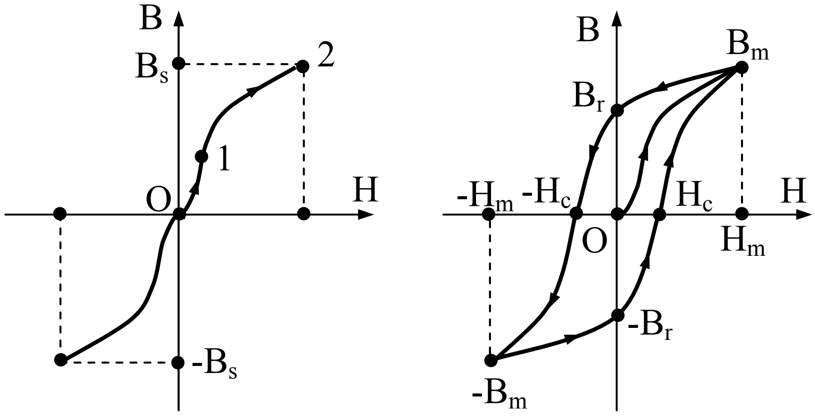
Direcţiile după care sunt satisfăcute relaţiile (5.46) se numesc *axe principale de magnetizare* ale cristalului.

c. Materiale magnetice neliniare (feromagnetice). Dacă dependenţa locală şi instantanee dintre magnetizaţia temporară şi intensitatea câmpului magnetic este neliniară, materialele magnetice se numesc cu magnetizare neliniară. Principalele materiale din această clasă, numite *feromagnetice*, au proprietatea de a se magnetiza intens la valori relativ mici ale intensităţii câmpului magnetic. Inducţia magnetică nu este proporţională cu intensitatea câmpului magnetic, relaţia dintre ele fiind de forma:

$$\mathbf{B} = \mu_0[\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{H})]\ . \tag{5.47}$$

Pentru aceste materiale nu este posibil să se definească permeabilitatea μ sau susceptivitatea χ_m cu valori independente de **H**. Magnetizarea corpurilor feromagnetice depinde de compoziţia chimică, de modul de prelucrare mecanică, de tratamentul termic şi de starea de magnetizare anterioară. Curbele care reprezintă grafic variaţia inducţiei magnetice sau magnetizaţiei în funcţie de intensitatea câmpului magnetic se numesc *curbe de magnetizare* sau *caracteristici de magnetizare* B = B(H), respectiv M = M(H). Din punctul de vedere al dependenței inducției magnetice sau magnetizației de stările de magnetizare anterioare, materialele feromagnetice se clasifică în *materiale magnetice moi* şi *materiale magnetice dure.*

Materiale magnetice moi. Din această clasă fac parte: fierul pur, oțelul moale, aliajele fier - siliciu, fontele albă, cenuşie etc. Caracteristica lor de magnetizare neliniară este simetrică în raport cu originea (fig. 5.2, a). Pe porțiunea O-1 a caracteristicii, inducția magnetică este proporțională cu intensitatea câmpului



a. b.

Fig. 5.2

magnetic şi permeabilitatea este practic constantă. Începând din punctul 1, la creşteri egale a câmpului magnetic corespund creşteri din ce în ce mai mici ale inducției magnetice încât în punctul 2 inducția magnetică rămâne practic constantă. Din acest punct al curbei, materialul este *saturat magnetic*. Dacă dintr-un punct oarecare situat pe porțiunea de saturație magnetică se reduc valorile intensității câmpului magnetic, punctul de funcțiune parcurge în sens opus curba de magnetizare; la anularea intensității câmpului magnetic, inducția magnetică se anulează. Inversând sensul câmpului magnetic, punctul de funcționare descrie în cadranul 3 o curbă simetrică cu curba din cadranul 1.

Materiale magnetice dure. Din această clasă fac parte: aliajele fier-cobalt, nichelul etc., cu caracteristica de magnetizare având forma din figura 5.2,b numită caracteristică de *histerezis*. Dacă materialul este inițial nemagnetizat, punctul de funcționare se deplasează pe curba de magnetizare. Dacă dintr-un punct oarecare situat pe porțiunea de saturație magnetică se reduc valorile intensității câmpului magnetic, punctul de funcționare se deplasează pe o curbă situată deasupra curbei de primă magnetizare şi la anularea câmpului magnetic, inducția magnetică păstrează o valoare nenulă B_r numită *inducție magnetică remanentă*. Inversând sensul câmpului magnetic, inducția magnetică scade şi se anulează pentru o intensitate a câmpului magnetic H_c numită *intensitate coercitivă a câmpului magnetic* (prescurtat *câmp magnetic coercitiv*). În continuare punctul de funcționare se deplasează pe porțiunile curbei $-H_c$, B_s, $-B_r$ şi apoi prin valori crescătoare ale câmpului, pe porțiunea H_c, B_s. Variației ciclice a intensității câmpului magnetic între două valori $\pm H_s$ îi corespunde un ciclu de magnetizare sau de histerezis. Ciclul de magnetizare obținut după efectuarea în prealabil a curbei de primă magnetizare şi care corespunde la două valori de semne opuse ale inducției magnetice de saturație $\pm B_s$ se numeşte *ciclu de histerezis limită*. Oricare dintre ciclurile care se obțin în aceleaşi condiții dar între valori ale inducției magnetice mai mici decât cea de saturație, sunt cuprinse în interiorul ciclului limită.

Fenomenul de histerezis nu este singurul fenomen care apare la magnetizarea corpurilor feromagnetice. Toate corpurile feromagnetice au o structură cristalină şi starea magnetică a unui cristal depinde atât de intensitatea câmpului magnetic cât şi de poziția axelor lor cristalografice. La cristale se disting *direcții de magnetizare grea* şi de *magnetizare uşoară*. Dacă cristalul se magnetizează de-a lungul axei de magnetizare uşoară, atunci pentru aceeaşi intensitate a câmpului magnetic se obține o magnetizare mai mare decât magnetizarea de-a lungul axei de magnetizare grea [10].

Un alt fenomen care însoțeşte magnetizarea corpurilor feromagnetice îl constituie fenomenul de *magnetostricțiune.* Prin magnetizare, cristalele se deformează mecanic; astfel, un monocristal de fier magnetizat de-a lungul diagonalei mari a cristalului cubic se alungeşte în câmpuri magnetice slabe şi se contractă în câmpuri magnetice intense. Proprietățile corpurilor feromagnetice sunt influențate de temperatură; dacă temperatura creşte treptat se ajunge la o valoare numită *temperatură critică Curie*, la care corpul îşi pierde proprietățile feromagnetice devenind paramagnetic. De exemplu, pentru fier temperatura critică este 753 ^{0}C, pentru nichel 376 ^{0}C.

La fel ca în cazul dielectricilor neliniari, în care la viteze mari de variație în timp a câmpului electric apare fenomenul de vâscozitate electrică, şi în materialele feromagnetice în condiții similare apare fenomenul de vâscozitate magnetică.

5.1.9. Legea fluxului magnetic

Legea fluxului magnetic este independentă de starea cinematică a corpurilor şi se enunță prin generalizarea teoremei fluxului magnetic demonstrată pentru câmpul magnetic staționar şi cvasistaționar.

a. Forma integrală a legii fluxului electric. *Fluxul magnetic printr-o suprafață închisă Σ egal cu integrala de suprafață a produsului scalar dintre inducția magnetică şi elementul de suprafață, este în fiecare moment nul*:

$$\Phi_\Sigma = \oint\!\!\!\oint_\Sigma \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}A = 0\,. \tag{5.48}$$

Deoarece în relația (5.48) nu intervin mărimi de material, legea fluxului magnetic este o lege generală şi de stare a câmpului electromagnetic.

b. Forma locală a legii fluxului magnetic. Pentru domeniile de variație spațială continuă a mărimilor, aplicând membrului stâng al relației (5.48) teorema divergenței, se obține:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,dA = \iiint_{v_\Sigma} \mathrm{div}\mathbf{B}\;dv = 0\,. \qquad (5.49)$$

Ținând seama că relația (5.49) este adevărată oricare ar fi domeniul v_Σ, rezultă:

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0\,. \qquad (5.50)$$

Deci, *în fiecare punct din câmp şi în fiecare moment, divergența inducției magnetice este identic nulă.*

Din legea fluxului magnetic rezultă următoarele concluzii importante (v. par. 4.4.6):

- Fluxul magnetic Φ_{S_Γ} prin orice suprafață deschisă S_Γ care se sprijină pe curba închisă Γ este acelaşi $\Phi_{S'_\Gamma} = \Phi_{S''_\Gamma}$ (4.93);
- Din compararea formei locale a legii fluxului electric (5.19) cu forma locală a legii fluxului magnetic (5.50), rezultă că un câmp de vectori **B** nu are surse (deoarece div**B** = 0). Prin urmare, se poate face afirmația echivalentă, că, în concordanță cu relația (5.50), nu există sarcini magnetice adevărate similare ce sarcinile electrice adevărate sau că în câmpul magnetic nu se pot exercita forțe magnetice cu direcția şi sensul vectorului **B**;
- Într-un câmp vectorial pentru care divergența este nulă, numit *câmp de vectori solenoidal*, liniile de câmp sunt totdeauna închise. Deci liniile inducției magnetice sunt totdeauna linii închise, deoarece în câmp magnetic nu există sarcini magnetice;
- **Deoarece divergența rotorului unui vector este identic nulă, din ecuația (5.50) rezultă că inducția magnetică este rotorul unui vector** A_e **numit *potențial electrodinamic vector*,**

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}_e\,. \qquad (5.51)$$

- Ținând seama de relația (5.51) şi utilizând teorema lui Stokes, fluxul magnetic printr-o suprafață deschisă S_Γ care se sprijină pe curba închisă Γ se poate exprima prin relația:

$$\Phi_{S_\Gamma} = \iint_{S_\Gamma} \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,dA = \iint_{S_\Gamma} \mathrm{rot}\mathbf{A}_e\,\mathbf{n}\,dA = \oint_{\Gamma} \mathbf{A}_e\,\mathbf{ds}\,. \qquad (5.52)$$

c. Forma locală a legii fluxului magnetic pe suprafețe de discontinuitate. Fie S_d o suprafață de discontinuitate a inducției magnetice, care separă domeniile 1 şi 2 în care inducțiile magnetice $\mathbf{B}_1$ şi $\mathbf{B}_2$ sunt funcții continue de punct (fig. 4.31). *Pe suprafața de discontinuitate a inducției magnetice, componentele ei normale sunt egale (v. par.4.7.2, c):*

$$B_{1n} = B_{2n}\,. \qquad (5.53)$$

Relația (5.53) constituie *forma locală a legii fluxului magnetic pe suprafețe de discontinuitate.*

În cazul mediilor liniare relaţia (5.53) se poate scrie şi sub forma:

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} , \qquad (5.54)$$

unde μ_1şi μ_2 sunt permeabilităţile celor două domenii separate de suprafaţa S_d.

5.2. LEGILE DE EVOLUŢIE ALE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

Legile de evoluţie ale câmpului electromagnetic sunt:

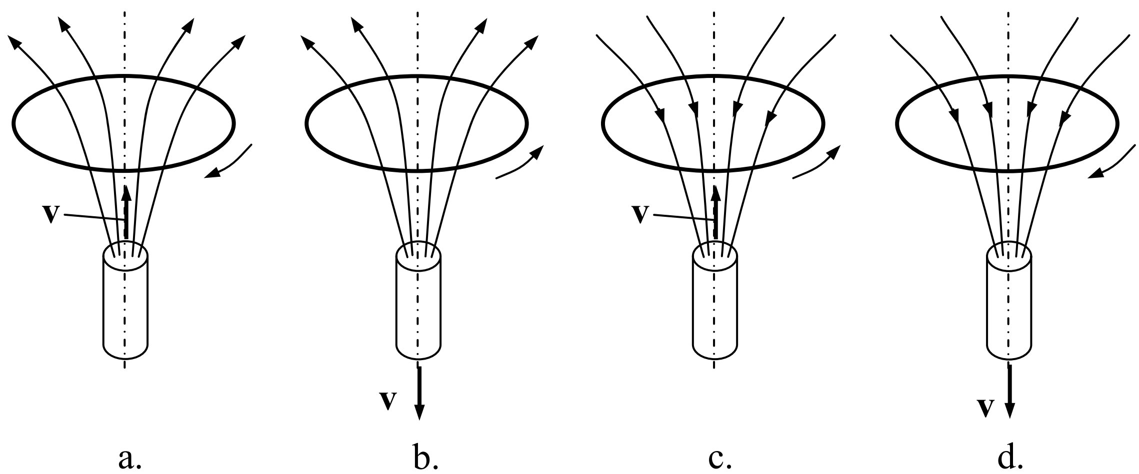
- legea inducţiei electromagnetice;
- legea conservării sarcinii electrice;
- legea circuitului magnetic.

5.2.1. Legea inducţiei electromagnetice

Câmpul electric este stabilit de corpuri încărcate cu sarcini electrice sau polarizate electric, de neomogenităţi fizico−chimice şi de fluxul magnetic variabil în timp. Legea inducţiei electromagnetice stabileşte modul de producere a câmpului electric indus, respectiv a tensiunii electromotoare induse de fluxul magnetic variabil in timp. Deoarece în formularea legii nu intervin mărimi de material, legea inducţiei electromagnetice este o lege generală a câmpului electromagnetic.

a. Bazele experimentale ale legii inducţiei electromagnetice. Formularea legii inducţiei electromagnetice se face prin analiza şi interpretarea experienţelor efectuate de Faraday, care a pus în evidenţă fenomenul inducerii de tensiuni electromotoare de fluxul magnetic variabil în timp.

Primul grup de experienţe. Se consideră dispozitivul alcătuit dintr-o spiră plată, filiformă, circulară, dintr-un material conductor şi omogen (fig. 5.3). În

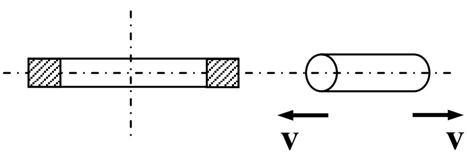


5.3

vecinătatea spirei se află un magnet permanent cilindric a cărui axă coincide cu axa spirei, iar liniile lui de câmp se închid în parte prin spiră. Dacă spira şi magnetul sunt ficşi, curentul electric prin spiră este nul. Menţinând spira fixă şi deplasând magnetul cu viteza **v** în lungul axei cu polul N spre spiră, se constantă că prin aceasta trece curent electric al cărui sens de referinţă este reprezentant în figura 5.3, a. Îndepărtând magnetul de spiră cu viteză -**v**, curentul schimbă sensul (fig. 5.3,b). Repetând experienţele cu magnetul având polul S spre spiră, curenţii au sensurile de referinţă reprezentate în figurile 5.3, c, d.

Menţinând magnetul fix şi apropiind, respectiv îndepărtând spira paralel cu ea însăşi în lungul axei, se constată că sensurile curenţilor în spiră rămân neschimbate. În toate cazurile în care intensitatea curentului este nenulă, se spune că în spiră *se induce curent electric de conducţie*. Spira constituie partea indusă sau *indusul*, iar magnetul partea inductoare sau inductorul. Din analiza acestor experienţe rezultă următoarele:

- Curentul electric este condiţionat de fluxul magnetic nenul în spiră. Dacă magnetul este situat cu axa cuprinsă în planul spirei (poziţie în care fluxul magnetic prin spiră este nul), independent de starea cinematică a magnetului, nu se induce curent electric în spiră (fig. 5.4);
- Existenţa unui flux magnetic prin spiră este o condiţie necesară dar nu suficientă, deoarece menţinând spira şi magnetul imobili, curentul este nul; deoarece curentul indus este nenul numai pe durata deplasării fie numai a indusului, fie numai a inductorului, urmează că inducerea curentului electric este provocată exclusiv de variaţia fluxului magnetic prin spiră;



5.4

- În conformitate cu legea conducţiei electrice, curentul electric în spiră este o consecinţă a unei tensiuni electromotoare e_Γ nenulă în lungul curbei spirei. Dacă la bornele deschise ale spirei se conectează un voltmetru şi se efectuează oricare din experienţele care au pus în evidenţă curentul electric indus, voltmetrul indică o tensiune electromotoare nenulă;
- Efectuând experienţe la diferite viteze **v** ale magnetului în raport cu spira sau a spirei în raport cu magnetul şi măsurând tensiunile electromotoare la bornele spirei, se constată că valorile lor absolute cresc respectiv scad odată cu creşterea respectiv scăderea modulului vitezei; deoarece odată cu deplasarea fie numai a magnetului, fie numai a spirei variază fluxul magnetic prin spiră Φ_{S_Γ}, urmează că tensiunea electromotoare indusă e_Γ este proporţională cu viteza de variaţie în timp a fluxului magnetic,

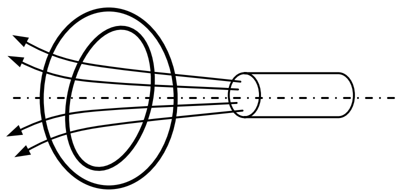
$$e_\Gamma \approx \frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}; \qquad (5.55)$$

- În oricare dintre experienţele de mai sus, curentul indus în spiră are sensul de referinţă astfel încât partea din fluxul magnetic pe care acesta îl produce tinde să compenseze variaţia fluxului magnetic inductoric; de exemplu, la apropierea magnetului cu polul N spre spiră, fluxul magnetic Φ_{S_Γ} creste si deci $\Delta\Phi_{S_\Gamma} > 0$ (fig. 5.3, a); sensul de referință al curentului în spiră este asociat fluxului său magnetic care este de semn opus lui $\Delta\Phi_{S_\Gamma}$. În acest sens, fenomenul inducției electromagnetice este un fenomen de reacție; inducerii curentului în spiră îi corespunde o reacție prin fluxul magnetic al curentului indus. Ca urmare, în ecuația (5.55), proporționalitatea dintre e_Γ şi $\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}$ este cu semn schimbat,

$$e_\Gamma = -\lambda \frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}, \tag{5.56}$$

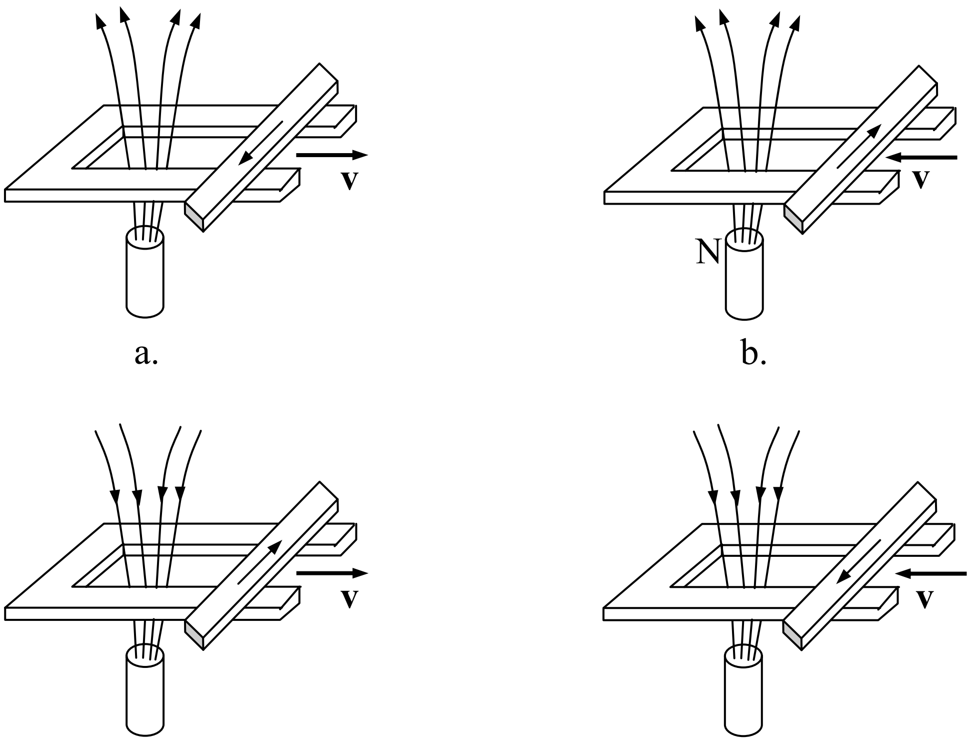
λ fiind o constantă a cărei valoare depinde de sistemul de unități de măsură.

Al doilea grup de experiențe. Se consideră spira şi magnetul fixe, însă spira este deformabilă (fig. 5.5). Se constată că numai pe durata deformării se induce în spiră o tensiune electromotoare e_Γ având expresia (5.56).



5.5

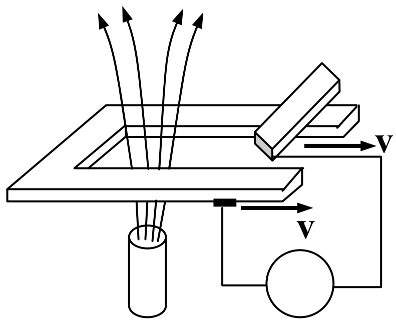
Pentru a pune în evidență localizarea tensiunii electromotoare e_Γ numai pe porțiunile conductoarelor care se deplasează pe durata deformării, se consideră dispozitivul din figura 5.6. Indusul este constituit dintr-o bară metalică în formă de U pe care poate aluneca paralel cu ea însăşi cu viteza **v** o bară metalică AB. Perpendicular pe planul indusului se află imobil magnetul M, liniile lui de câmp magnetic



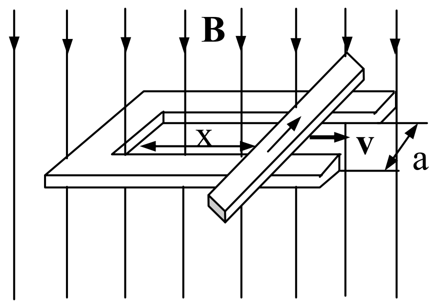
5.6

închizându-se prin suprafața ABCD a indusului. Efectuând experiențe la diferite viteze ale barei AB încât aria ABCD crește sau scade, cu magnetul având polul N, respectiv polul S spre indus, se regăsesc aceleași rezultate obținute în primul grup de experiențe.

Dacă se menține în contact galvanic cu bara U numai una dintre



5.7

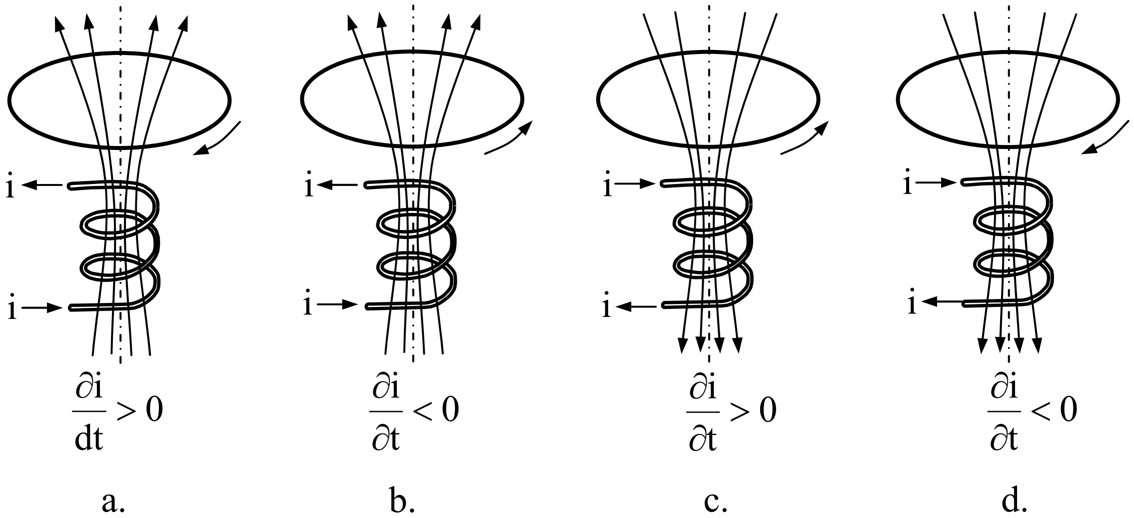


5.8

extremitățile barei AB, iar la cealaltă extremitate se conectează o bornă a unui voltmetru, cealaltă bornă fiind legată la o perie care alunecă în contact cu bara U cu aceeași viteză **v** cu a barei AB (fig. 5.7), se constată că apare o tensiune electromotoare egală cu tensiunea electromotoare indusă în bara AB care s-ar deplasa cu aceeași viteză dar izolată galvanic de bara U. Rezultă că în experiențele efectuate (fig. 5.6, a-d) numai bara AB contribuie la tensiunea electromotoare care stabilește curentul indus în circuitul închis format de barele U și AB. Dacă se presupune câmpul inductoric uniform și se notează cu B_n componenta normală a inducției pe planul indusului (fig. 5.8), fluxul magnetic prin suprafața ABCD are expresia $\Phi_{S_\Gamma} = B_n x a$ și tensiunea electromotoare e_Γ calculată cu relația (5.56) este proporțională cu viteza barei $v = \dfrac{dx}{dt}$.

Al treilea grup de experiențe. Inductorul dispozitivului din figura 5.3 este constituit dintr-o bobină cilindrică fixă parcursă de curent electric (fig. 5.9). Dacă curentul prin bobină este continuu, fluxul magnetic prin spiră fiind constant în timp, nu se induce în spiră tensiune electromotoare. Dacă intensitatea curentului inductoric variază sinusoidal în timp, $i = I_{max} \sin \omega t$, în spiră se induce o tensiune electromotoare, respectiv un curent electric. Deoarece fluxul magnetic inductoric este proporțional cu intensitatea curentului din bobină, la variații de un semn ale curentului inductoric corespund variații de același semn ale fluxului prin spiră și fenomenele se examinează la fel ca la primul grup de experiențe. În figurile 5.9, a-d s-au reprezentat sensurile curenților induși la diferite momente de timp dintr-o perioadă a curentului inductoric.

Pentru ca fluxul magnetic prin spira indusului $\Phi_{S_\Gamma} = \iint\limits_{S_\Gamma} \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,dA$ să fie variabil în timp, este necesar să varieze în timp cel puțin una dintre mărimile inducția magnetică **B** sau suprafața S_Γ. În primul și al treilea grup de experiențe fluxul magnetic variază în timp datorită variației inducției magnetice **B**; în al doilea grup de experiențe datorită variației suprafeței S_Γ.



5.9

Din punctul de vedere al stării cinematice, primele două grupe de experiențe pun în evidență *fenomenul inducției electromagnetice prin mişcare*, iar al treilea grup de experiențe, *fenomenul inducției electromagnetice prin pulsație.*

Din analiza fiecăreia dintre cele trei grupe de experiențe rezultă că tensiunea electromotoare indusă are expresia (5.56). În S.I. se alege $\lambda = 1$ şi deci

$$e_\Gamma = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}. \tag{5.57}$$

Relația (5.57) constituie *legea inducției electromagnetice în formulare integrală*: *tensiunea electromotoare* e_Γ *indusă în lungul unei curbe închise* Γ *este egală cu viteza de variație în timp cu semn schimbat a fluxului magnetic* Φ_{S_Γ} *prin orice suprafață* S_Γ *care se sprijină pe curba* Γ.

Proporționalitatea dintre e_Γ şi $\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}$ a fost stabilită de Faraday, iar semnul schimbat al proporționalității a fost introdus de Lenz.

Pentru o bobină cu N spire, $\Phi_{S_\Gamma} = N\Phi_{fS_\Gamma}$ (v. par. 4.8.1).

b. Forma integrală a legii inducției electromagnetice. În toate experiențele care au pus în evidență fenomenul inducției electromagnetice, intensitatea câmpului electric imprimat $\mathbf{E}_i$ şi tensiunea electromotoare a părții potențiale a câmpului electric $\mathbf{E}_c$ sunt nule. Rezultă că tensiunea electromotoare indusă de fluxul magnetic variabil în timp este egală cu integrala curbilinie a unei componente de câmp electric distinctă de $\mathbf{E}_i$ şi de $\mathbf{E}_c$ numită *câmp electric indus* sau *solenoidal* $\mathbf{E}_s$. Ecuația (5.57) devine:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \mathbf{E}_s\,\mathbf{ds} = \oint_\Gamma \mathbf{E}\,\mathbf{ds} = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma} \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,dA. \tag{5.58}$$

În relația (5.58) s-a înlocuit $\mathbf{E}_s$ cu $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_c$, deoarece $\oint_\Gamma \mathbf{E}_c \mathbf{ds} = 0$.

Asocierea sensurilor de referință (de integrare) a tensiunii electromotoare, de-a lungul curbei Γ şi a fluxului magnetic prin suprafața S_Γ, se face după regula burghiului drept. Semnul (-) din relația (5.58) semnifică faptul că sensul tensiunii electromotoare este invers față de sensul de referință pe curba Γ când fluxul magnetic prin suprafața S_Γ este orientat în concordanță cu sensul de referință al acesteia şi crescător în timp.

În cazul mediilor în mişcare, se consideră curba Γ şi, implicit, suprafața S_Γ ataşate corpurilor în mişcare; ca urmare, fluxul magnetic variază în timp atât datorită variației locale în timp a inducției magnetice, cât şi datorită deplasării mediului. Derivata în raport cu timpul a fluxului magnetic este egală cu integrala de suprafață a *derivatei de flux* a inducției magnetice $d_f\mathbf{B}/dt$:

$$\frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma} \mathbf{B}\,\mathbf{n}\,dA = \iint_{S_\Gamma} \frac{d_f\mathbf{B}}{dt}\mathbf{n}\,dA. \qquad (5.59)$$

Fie o spiră filiformă Γ în mişcare cu viteza v **într-un câmp magnetic de inducție** B **variabilă în timp. Derivata de flux a inducției magnetice are următoarea expresie [10]:**

$$\frac{d_f\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v}\,\mathrm{div}\mathbf{B} + \mathrm{rot}(\mathbf{B}\times\mathbf{v}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}(\mathbf{B}\times\mathbf{v}), \qquad (5.60)$$

unde s-a ținut seama de forma locală a legii fluxului magnetic div$\mathbf{B}$ = 0.

Introducând (5.60) în relația (5.58), se obține *forma integrală a legii inducției electromagnetice*:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \mathbf{E}\,\mathbf{dl} = -\iint_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathbf{dA} + \iint_{S_\Gamma} \mathrm{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\mathbf{dA}. \qquad (5.61)$$

Tensiunea electromotoare indusă e_Γ conține doi termeni:

- *tensiunea electromotoare indusă prin pulsație,*

$$e_{\Gamma p} = -\iint_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathbf{dA} \qquad (5.62)$$

stabilită exclusiv prin variația în timp a inducției magnetice, suprafața S_Γ fiind menținută fixă, şi

- *tensiunea electromotoare indusă prin mişcare*:

$$e_{\Gamma_m} = \iint_{S_\Gamma} \mathrm{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\mathbf{dA} = \oint_\Gamma (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\,\mathbf{ds}, \qquad (5.63)$$

stabilită exclusiv prin variația în timp a suprafeței S_Γ, respectiv a curbei Γ, inducția magnetică **B** fiind constantă în timp.

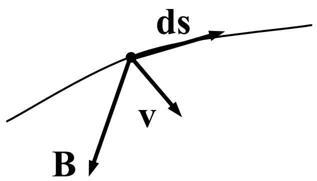
Tensiunea electromotoare elementară $de_{\Gamma m}$ indusă în elementul de conductor **ds** care se deplasează cu viteza **v** (fig. 5.10), are expresia:

$$de_{\Gamma m} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\mathbf{ds}. \tag{5.64}$$

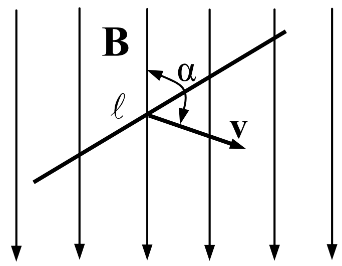
Sensul de referință al tensiunii electromotoare induse $de_{\Gamma m}$ este sensul de înaintare al burghiului drept care se roteşte de la **v** către **B** (sau regula mâinii drepte). De exemplu, într-un conductor drept de lungime ℓ care se deplasează cu viteza **v** în câmp magnetic uniform de inducție **B** (fig. 5.11) se induce tensiunea electromotoare:

$$e_{\Gamma m} = v \cdot B \cdot \ell \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta, \tag{5.65}$$

unde α este unghiul format de vectorii **v** şi **B**, iar β este unghiul format de vectori **v** x **B** şi ℓ. Membrul doi al relației (5.64) se anulează dacă doi dintre vectorii



5.10



5.11

produsului mixt sunt paraleli. În consecință, tensiunea electromotoare indusă prin mişcare este nenulă numai dacă conductorul în mişcarea lui taie liniile de câmp magnetic.

c. Forma locală a legii inducției electromagnetice. Pe domenii de continuitate a mărimilor, aplicând teorema lui Stokes primului membru al ecuației (5.61), rezultă:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \mathbf{E}\,\mathbf{ds} = \iint_{S_\Gamma} \mathrm{rot}\mathbf{E}\,\mathbf{dA} = -\iint_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathbf{dA} + \iint_{S_\Gamma} \mathrm{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\mathbf{dA}. \tag{5.66}$$

Identificând integranzii din relația (5.66), se obține *forma locală a legii inducției electromagnetice*,

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{5.67}$$

În medii imobile, **v = 0** şi ecuația (5.67) devine:

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{dt} \tag{5.68}$$

şi constituie *forma locală a legii inducţiei electromagnetice pentru medii imobile.*

d. Forma locală a legii inducţiei electromagnetice pe suprafeţe de discontinuitate.

Medii imobile. Fie S_d o suprafaţă de discontinuitate a câmpului electric, care separă domeniile imobile 1 şi 2. În două puncte infinit apropiate de S_d, intensităţile câmpului electric $\mathbf{E}_1$ şi $\mathbf{E}_2$ sunt diferite (fig. 2.38.). Se consideră conturul Γ de formă dreptunghiulară situat în planul vectorilor $\mathbf{E}_1$ şi $\mathbf{E}_2$ cu laturile Δs şi Δh. Tensiunea electromotoare indusă prin pulsaţie este:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \mathbf{E}\,\mathbf{ds} = -\iint_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathbf{n}\,dA\,, \tag{5.69}$$

sau:

$$\mathbf{E}_2\,\mathbf{t}\,\Delta s - \mathbf{E}_1\,\mathbf{t}\,\Delta s = -\frac{\partial B_n}{\partial t}\Delta s\,\Delta h\,, \tag{5.70}$$

unde **t** este versorul tangenţial la S_d, iar B_n este componenta normală a inducţiei magnetice pe suprafaţa conturului Γ.

La limită pentru $\Delta h \to 0$, rezultă:

$$\mathbf{E}_2\mathbf{t} - \mathbf{E}_1\mathbf{t} = 0 \quad \text{sau} \quad E_{1t} = E_{2t}. \tag{5.71}$$

Pe suprafaţa de discontinuitate a câmpului electric care separă două medii imobile, componentele tangenţiale ale intensităţii câmpului electric se conservă.

Relaţia (5.71) mai poate fi scrisă sub forma:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \tag{5.72}$$

unde $\mathbf{n}_{12}$ reprezintă versorul normal pe S_d, orientat dinspre domeniul 1 spre domeniul 2.

Relaţia (5.72) constituie *forma locală a legii inducţiei electromagnetice pe suprafeţe de discontinuitate pentru medii imobile*.

Medii în mişcare. Fie S_d o suprafaţă de discontinuitate care separă două medii în mişcare şi $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ vitezele punctelor situate în imediata vecinătate a lui S_d în care intensităţile câmpurilor electrice şi inducţiile magnetice au valorile $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ respectiv $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$. Ecuaţia (5.66) se scrie sub forma:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_2 - \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1), \tag{5.73}$$

sau

$$E_{2t} - E_{1t} = \left|\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_2\right|_t - \left|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1\right|_t . \tag{5.74}$$

Pe suprafaţa de discontinuitate a câmpului electric care separă două medii în mişcare, diferenţa dintre componentele tangenţiale ale intensităţii câmpului electric este egală cu diferenţa dintre componentele tangenţiale ale vectorului **v** ×

B, *în cele două medii*. Relația (5.73) reprezintă *forma locală a legii inducției electromagnetice pe suprafețe de discontinuitate pentru medii în mişcare*.

e. Teorema refracției liniilor de câmp electric. Se consideră o suprafață de discontinuitate pentru liniile câmpului electric, neîncărcată electric ($\rho_A = 0$), care separă două medii liniare, izotrope şi lipsite de polarizație permanentă, ceea ce înseamnă că între intensitatea câmpului electric şi inducția electrică există relația $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$. Efectuând raportul membru cu membru al relațiilor formelor locale pe suprafețe de discontinuitate ale legilor fluxului electric (5.21) şi inducției electromagnetice pentru medii imobile (5.71), se obține:

$$\frac{\varepsilon_1 E_{1n}}{E_{1t}} = \frac{\varepsilon_2 E_{2n}}{E_{2t}} \quad . \tag{5.75}$$

Deoarece $\frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \mathrm{tg}\alpha_1$ şi $\frac{E_{2t}}{E_{2n}} = \mathrm{tg}\alpha_2$, unde α_1 şi α_2 sunt unghiurile pe care le formează cu normala la suprafața S_d intensitățile câmpului electric în cele două medii (fig. 2.38), rezultă:

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ . \tag{5.76}$$

Relația (5.76) constituie *teorema refracției liniilor de câmp electric*: *la trecerea dintr-un dielectric cu permitivitatea* ε_1 *în dielectricul cu permitivitatea* ε_2*, raportul dintre tangentele unghiurilor de incidență* α_1 *şi de refracție* α_2 *este egal cu raportul permitivităților.*

Făcând abstracție de cazurile limită $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ şi $\pi/2$, la trecerea dintr-un mediu cu permitivitate mai mare într-unul cu permitivitate mai mică, linia de câmp electric se apropie de normală, valoarea intensității câmpului electric creşte, iar cea a inducției electrice scade.

f. Forma locală a legii inducției electromagnetice în funcție de potențialele electrodinamice. Ținând seama de relația (5.51), ecuația (5.67) se poate scrie sub forma:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{A}_e = -\mathrm{rot}\frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t}, \tag{5.77}$$

sau:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0. \tag{5.78}$$

Urmează că vectorul $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ este irotațional, deci exprimabil prin gradientul unei funcții scalare V_e, numită *potențial electrodinamic scalar*:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathrm{grad} V_e , \qquad (5.79)$$

respectiv:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \mathrm{grad} V_e . \qquad (5.80)$$

Relația (5.80) constituie forma locală a legii inducției electromagnetice în funcție de potențialele electrodinamice vector $\mathbf{A}_e$ și scalarV_e.
În medii imobile, $\mathbf{v} = 0$, ecuația (5.80) devine:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} - \mathrm{grad} V_e . \qquad (5.81)$$

Pe suprafețe de discontinuitate, forma locală a legii inducției electromagnetice (5.78) în funcție de potențialele vector A_e și scalarV_e are forma:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 . \qquad (5.82)$$

Ținând seama de relația (5.73) se deduce *relația de conservare a componentelor tangențiale ale potențialului vector*:

$$A_{1t} = A_{2t} . \qquad (5.83)$$

g. Tensiune electrică și tensiune electromotoare. Diferență de potențial și tensiune la borne. Noțiunea de tensiune electrică este legată de câmpul electric rezultat (în sens larg – v. par.5.14). Integrala de linie a intensității câmpului electric în sens larg $\mathbf{E}_l$ (5.26) între două puncte P_1 și P_2 ale unei curbe C se numește *tensiune electrică în sens larg*,

$$(u_{12})_l = \int_{P_1(C)}^{P_2} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i) \mathbf{ds} . \qquad (5.84)$$

Dacă între punctele P_1 și P_2 ale curbei C nu există câmp imprimat ($\mathbf{E}_i = 0$), integrala de linie a intensității câmpului electric în sens restrâns $\mathbf{E}$ (5.27) între punctele P_1 și P_2 ale unei curbei Γ se numește *tensiune electrică*:

$$u_{12} = \int_{P_1(C)}^{P_2} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_s) \mathbf{ds} = \int_{P_1(C)}^{P_2} \mathbf{E} \, \mathbf{ds} . \qquad (5.85)$$

Integrala de linie a intensității câmpului electric în sens larg $\mathbf{E}_l$ (5.26), în lungul unei curbe închise Γ, coincide cu integrala componentei necoulombiene a intensității câmpului electric în lungul aceleiași curbe închise, deoarece $\oint_\Gamma \mathbf{E}_c \mathbf{ds} = 0$ și se numește *tensiune electromotoare,* notată cu e_Γ:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \mathbf{E}_l\, \mathbf{ds} = \oint_\Gamma (\mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i)\mathbf{ds}. \qquad (5.86)$$

Integrala de linie a lui $\mathbf{E}_c$ este independentă de forma curbei C între punctele P_1 şi P_2 şi se numeşte diferenţă de potenţial (v. par. 3.6),

$$\int_{P_1(C)}^{P_2} \mathbf{E}_c\, \mathbf{ds} = V_1 - V_2. \qquad (5.87)$$

În regim variabil în timp, tensiunea electrică între două puncte P_1 şi P_2 depinde de alegerea drumului de integrare. Într-adevăr, pentru conturul închis Γ (fig. 5. 12), în câmp magnetic variabil în timp rezultă:

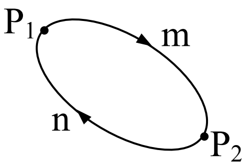


Fig. 5.12

$$\oint_\Gamma \mathbf{E\, ds} = \int_{P_1(m)}^{P_2} \mathbf{E\, ds} + \int_{P_2(n)}^{P_1} \mathbf{E\, ds} = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}, \qquad (5.88)$$

sau

$$\int_{P_1(m)}^{P_2} \mathbf{E\, ds} = \int_{P_1(n)}^{P_2} \mathbf{E\, ds} - \frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}. \qquad (5.89)$$

Fie de exemplu, un circuit de curent alternativ. Un voltmetru ale cărui conductoare sunt conduse în lungul unei curbe C între cele două borne P_1 şi P_2 ale circuitului, măsoară tensiunea electrică (5.85). Pentru ca voltmetrul să măsoare, între cele două borne, numai diferenţa de potenţial, trebuie ca firele voltmetrului să fie dispuse în lungul unei linii C_{b12} astfel încât în fiecare punct al acesteia să fie îndeplinită condiţia:

$$E_s \cdot ds = \mathbf{0}. \qquad \mathbf{(5.90)}$$

Linia deschisă C_{b12} trasată exclusiv prin dielectric, cu extremităţile la bornele circuitului şi care satisface condiţia (5.90) se numeşte *linie a tensiunii la borne*. Tensiunea electrică egală cu integrala de linie, în lungul unei curbe C_{b12}, a intensităţii câmpului electric, egală cu diferenţa de potenţial, se numeşte *tensiune la borne*:

$$u_{b12} = V_1 - V_2 = \int_{P_1(C_b)}^{P_2} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_s)\mathbf{ds} = \int_{P_1(C_b)}^{P_2} \mathbf{E}_c\, \mathbf{ds}. \qquad (5.91)$$

După cum ştie (v. par. 2.12.6 şi 3.6), în câmpul electrostatic şi în câmpul electric staţionar, integrala de linie a vectorului **E** nu depinde de alegerea drumului de integrare între punctele P_1 şi P_2, dacă drumul de integrare nu trece prin surse de tensiune electromotoare. În aceste câmpuri, tensiunea electromotoare în orice contur închis care nu trece prin surse de tensiune electromotoare este egală cu zero. Aceste câmpuri pot fi caracterizate complet prin potenţialul electric scalar, adică sunt câmpuri potenţiale. În raport cu ele se poate utiliza termenul *diferenţă de* *potențial între punctele* P_1 și P_2. Astfel, noțiunea de diferență de potențial, aplicabilă numai câmpurilor potențiale, are un sens mai restrâns decât noțiunea de tensiune aplicabilă oricărui câmp electric. În cazul câmpului potențial, noțiunile de tensiune electrică între punctele P_1 și P_2 și diferență de potențial între punctele P_1 și P_2 coincid.

h. Tensiuni electromotoare de inducție proprie și mutuală. Dacă în relațiile lui Maxwell (4.267) curenții i_k prin bobine sunt variabili în timp, fluxurile magnetice Φ_j fiind de asemenea variabile în timp, induc tensiuni electromotoare e_j,

$$e_j = -\frac{d\Phi_j}{dt} = -L_{j1}\frac{di_1}{dt} - L_{j2}\frac{di_2}{dt} - \ldots - L_{jj}\frac{di_j}{dt} - \ldots - L_{jk}\frac{di_k}{dt} - \ldots - L_{jn}\frac{di_n}{dt}, \quad (5.92)$$

$j=1, 2, \ldots, n$,

unde termenul e_{jj},

$$e_{jj} = e_j\Big|_{i_k=0, k\neq j} = -L_{jj}\frac{di_j}{dt} \quad (5.93)$$

este *tensiunea electromotoare de inducție proprie* sau de *autoinducție*, iar termenul e_{jk},

$$e_{jk} = e_j\Big|_{i_j=0, j\neq k} = -L_{jk}\frac{di_k}{dt} \quad (5.94)$$

este *tensiunea electromotoare de inducție mutuală în bobina* j *produsă de curentul* i_k.

j. Ecuația de tensiuni a unei bobine. Se consideră un sistem format din n bobine, cuplate magnetic, parcurse de curenții de conducție variabili în timp i_1, i_2, …, i_n. Bobinele sunt alimentate de la n surse având tensiunile la borne u_{bk}, k = 1, 2,…,n. Fiecărei bobine i se aplică legea inducției electromagnetice în lungul unei curbe Γ_k care se închide de-a lungul conductorului bobinei ($a_k f_k b_k$) și al unei linii a tensiunii

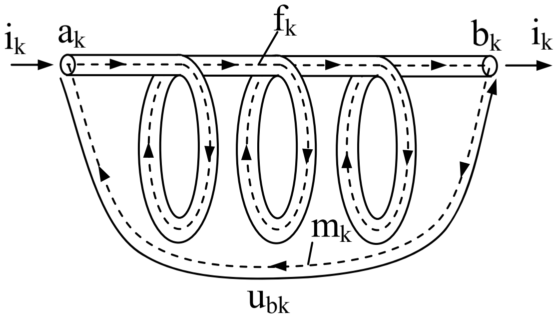


Fig. 5.13

la borne ($b_k m_k a_k$) (fig. 5.13):

$$\oint_{\Gamma_k} \mathbf{E}_k \mathbf{ds}_k = -\frac{d\Phi_k}{dt}, \quad (5.95)$$

sau,

$$\int_{a_k(f_k)}^{b_k} \mathbf{E}_k\, \mathbf{ds}_k + \int_{b_k(m_k)}^{a_k} \mathbf{E}_k\, \mathbf{ds}_k = -\frac{d\Phi_k}{dt}. \tag{5.96}$$

Pentru porțiunea ($a_k f_k b_k$) din curba Γ_k care trece prin conductorul străbătut de curent electric de conducție este valabilă legea conducției electrice $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$ şi deci:

$$\int_{a_k(f_k)}^{b_k} \mathbf{E}_k\, \mathbf{ds}_k = \int_{a_k(f_k)}^{b_k} \rho_k\, \mathbf{J}_k\, \mathbf{ds}_k = i_k \int_{a_k(f_k)}^{b_k} \rho_k \frac{ds_k}{A_k} = R_k\, i_k\,. \tag{5.97}$$

Deoarece,

$$\int_{b_k(m_k)}^{a_k} \mathbf{E}_k\, \mathbf{ds}_k = -u_{bk} \tag{5.98}$$

relația (5.96) devine:

$$u_{bk} = R_k\, i_k + \frac{d\Phi_k}{dt}. \tag{5.99}$$

5.2.2. Legea conservării sarcinii electrice

a. Forma integrală a legii conservării sarcinii electrice. Fie o suprafață închisă Σ care intersectează conductoare parcurse de curent electric şi conține în interior corpuri încărcate cu sarcini electrice. Sub formă integrală enunțul legii este următorul: *în fiecare moment, intensitatea curentului electric de conducție* i_Σ *care iese din suprafața Σ este egală cu viteza de scădere în timp a sarcinii electrice* q_Σ *care încarcă corpurile din interiorul suprafeței Σ, indiferent de starea lor cinematică:*

$$i_\Sigma = -\frac{dq_\Sigma}{dt}. \tag{5.100}$$

Dacă sarcina electrică se repartizează cu densitate de volum ρ_v şi $\mathbf{J}$ este densitatea curentului electric de conducție într-un punct pe suprafața Σ, ecuația (5.100) devine:

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \mathbf{J}\, \mathbf{n}\, dA = -\frac{dq_\Sigma}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_{v_\Sigma} \rho_v\, dv = -\iiint_{v_\Sigma} \frac{d_v \rho_v}{dt} dv\,, \tag{5.101}$$

unde $\dfrac{d_v \rho_v}{dt}$ este derivata de volum în raport cu timpul a lui ρ_v.

Dacă suprafața Σ se consideră ataşată corpurilor în mişcare şi antrenată de mişcarea acestora şi diferitele puncte ale suprafeței Σ au viteza $\mathbf{v}$, atunci variația în timp a sarcinii din volumul v_Σ, care este funcție de punct şi de timp $\rho_v(\mathbf{r},t)$, este produsă de două cauze: variația locală în timp a densității de volum a sarcinii electrice şi mişcarea corpurilor. În acest caz, derivata în raport cu timpul a integralei de volum a lui ρ_v are expresia [10]:

$$\frac{dq_\Sigma}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{v_\Sigma} \rho_v dv = \oiint_\Sigma \rho_v \mathbf{v} \mathbf{dA} + \iiint_{v_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv. \qquad (5.102)$$

Introducând acest rezultat în relația (5.101), se obține *forma integrală a legii conservării sarcinii electrice pentru corpuri în mişcare*:

$$\oiint_\Sigma (\mathbf{J} + \rho_v \mathbf{v}) \mathbf{dA} = -\iiint_{v_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv. \qquad (5.103)$$

Această formă a legii pune în evidență faptul că sarcina electrică dintr-un domeniu v_Σ limitat de o suprafață închisă Σ, considerată de această dată fixă față de sistemul de referință ales, scade atât datorită curentului de conducție, cât şi datorită curentului de convecție care părăsesc suprafața Σ.

Deoarece în formularea legii nu intervin mărimi de material, legea conservării sarcinii electrice este o lege generală a câmpului electromagnetic.

Se observă că, dacă $\mathbf{v} = 0$, relația (5.103) devine:

$$\oiint_\Sigma \mathbf{J}\, \mathbf{dA} = -\iiint_{v_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv \qquad (5.104)$$

şi constituie *forma integrală a legii conservării sarcinii electrice pentru corpuri imobile*.

Dacă primul membru al ecuației (5.100) este nul, $i_\Sigma = 0$, rezultă:

$$q_\Sigma = \text{constant}. \qquad (5.105)$$

Curentul total se anulează fie dacă suma curenților care intră prin anumite porțiuni ale suprafeței Σ este în fiecare moment egală cu suma curenților care ies prin alte porțiuni ale suprafeței, fie dacă densitatea de curent **J** este nulă peste tot pe Σ; acest ultim caz are loc, de exemplu, dacă nici un conductor nu intersectează Σ, prin urmare domeniul v_Σ este *izolat galvanic*. Dacă sarcina electrică este nenulă, $q_\Sigma \neq 0$, domeniul v_Σ nu este izolat electric deoarece prezența sarcinii $+q_\Sigma$ implică existența sarcinii $-q_\Sigma$ în exteriorul suprafeței Σ; domeniul v_Σ este *izolat electric*, dacă în afară de izolarea lui galvanică sarcina electrică din interiorul suprafeței Σ este nulă. Anularea sarcinii electrice din domeniul v_Σ nu presupune neapărat lipsa sarcinilor electrice; sarcinile care încarcă corpurile situate în v_Σ pot alcătui în fiecare moment un sistem complet de sarcini adică:

$$\sum_{k \in V_\Sigma} q(t) = 0. \qquad (5.106)$$

b. Forma locală a legii conservării sarcinii electrice. În ipoteza că în domeniul v_Σ, mărimile **J** şi ρ_v sunt funcții continue de punct, aplicând teorema divergenței primului membru al relației (5.103), se obține:

$$\iiint_{v_\Sigma} \mathrm{div}\left(\mathbf{J} + \rho_v \mathbf{v}\right) dv = -\iiint_{v_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv \,. \tag{5.107}$$

Identificând integranzii din relația (5.107) rezultă:

$$\mathrm{div}\left(\mathbf{J} + \rho_v \mathbf{v}\right) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \,. \tag{5.108}$$

Relația (5.108) constituie *forma locală* sau *diferențială a legii conservării sarcinii electrice pentru corpuri în mişcare*.

Ținând seama de forma locală a legii fluxului electric (5.19), forma locală a legii conservării sarcinii electrice pentru corpuri în mişcare (5.108) este următoarea:

$$\mathrm{div}\left(\mathbf{J} + \rho_v \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0 \,. \tag{5.109}$$

În cazul mediilor imobile, $\mathbf{v} = 0$, relațiile (5.108) şi (5.109) devin:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\,; \quad \mathrm{div}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0 \tag{5.110}$$

şi constituie *forma locală* sau *diferențială a legii conservării sarcinii electrice pentru corpuri imobile.*

Relației integrale $i_\Sigma = 0$ îi corespunde anularea divergenței densității de curent,

$$\mathrm{div}\,\mathbf{J} = 0 \,. \tag{5.111}$$

c. Forma locală a legii conservării sarcinii electrice pe suprafețe de discontinuitate. Fie S_d o suprafață de discontinuitate a densității curentului electric de conducție pe care este distribuită sarcina electrică cu densitate superficială ρ_A (fig. 3.14). Dacă $\mathbf{J_1}$ şi $\mathbf{J_2}$ sunt densitățile de curent de conducție în punctele situate în imediata apropiere a lui S_d, presupusă imobilă, ecuația (5.100) scrisă pentru suprafața Σ a cilindrului de înălțime $\Delta h \rightarrow 0$ şi arie a bazelor dA, are forma:

$$i_\Sigma = \oiint_\Sigma \mathbf{J}\,\mathbf{n}\, dA = \left(\mathbf{J}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{J}_2 \mathbf{n}_2\right)\Delta A = -\frac{dq_\Sigma}{dt} = -\frac{\partial \rho_A}{\partial t}\Delta A \,, \tag{5.112}$$

sau,

$$J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \rho_A}{\partial t} \,. \tag{5.113}$$

Dacă

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = 0 \,, \tag{5.114}$$

rezultă:

$$J_{1n} = J_{2n} \ . \tag{5.115}$$

Pe suprafaţa de separaţie a două medii conductoare pe care este satisfăcută relaţia (5.114*), componentele normale ale densităţii curentului electric de conducţie se conservă.*

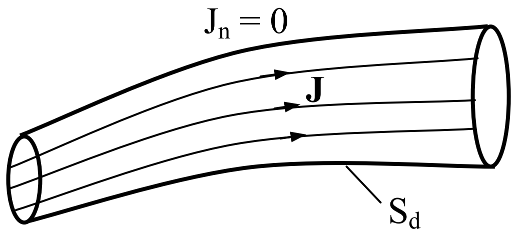


Fig. 5.14

Relaţia (5.113) constituie *forma locală a legii conservării sarcinii electrice pe suprafeţe de discontinuitate*.

Dacă mediul 1 este un conductor, iar mediul 2 este un dielectric în care $J_{2n} = 0$ (fig. 5.14), din relaţia (5.115), rezultă $J_{1n} = 0$. Prin urmare, densitatea curentului electric de conducţie este tangenţială la suprafaţa conductoarelor (care în acest fel conţine liniile densităţii de curent).

d. Curentul electric de deplasare. Într-un dielectric perfect nu trebuie să existe particule cu sarcină electrică liberă, care ar produce curenţi de conducţie. Conductivitatea unui asemenea mediu este nulă. Dielectricii reali au o conductivitate, care deşi foarte mică, este totuşi finită. În acest paragraf, vom neglija conductivitatea dielectricilor, prin urmare vom considera dielectricii ca fiind perfecţi.

La o variaţie în timp a intensităţii câmpului electric variază polarizaţia **P** a dielectricului şi deci inducţia electrică **D**. În acest timp, în dielectric se mişcă particulele elementare cu sarcină electrică care intră în componenţa atomilor şi moleculelor substanţei. Prin urmare, în dielectric există curent electric. Deoarece în dielectric particulele cu sarcini nu sunt libere şi sub acţiunea câmpului electric ele pot numai să se deplaseze, acest fel de curent electric se numeşte *curent electric de deplasare*.

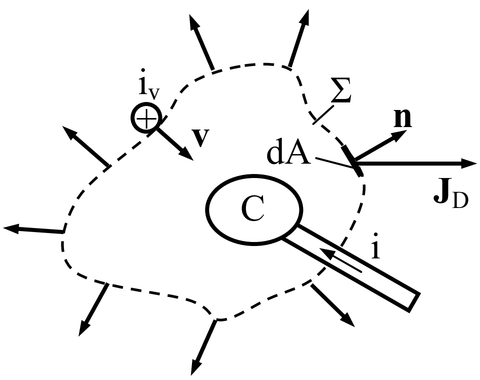


Fig. 5.15

Considerăm într-un dielectric o suprafaţă închisă Σ, imobilă (fig. 5.15) şi să presupunem că un corp fix C, care se găseşte în interiorul aceste suprafeţe, se încarcă cu sarcină electrică. În procesul de încărcare, sarcina electrică a corpului creşte de la zero la valoarea ei finală şi în dielectric creşte intensitatea câmpului electric **E**, ceea ce determină o intensificare a polarizării dielectricului. În timpul procesului de stabilire a câmpului electric, s-au deplasat particulele elementare cu sarcină electrică care intră în componenţa substanţei dielectricului şi prin suprafaţa Σ trece, din interior spre exterior, un curent de deplasare. Deoarece în timpul procesului de încărcare intensitatea câmpului electric în dielectric creşte, rezultă, în conformitate cu legea legăturii dintre **D**, **E** şi **P**, că şi inducţia electrică **D** în dielectric creşte. Fie

$q_\Sigma(t)$ sarcina electrică care încarcă corpul considerat, la un moment de timp t. Conform legii fluxului electric, rezultă:

$$\oiint_\Sigma \mathbf{D}(t)\mathbf{dA} = q_\Sigma(t). \tag{5.116}$$

Derivând în raport cu timpul relația (5.116) şi deoarece mediul este imobil, se obține:

$$\frac{d}{dt}\oiint_\Sigma \mathbf{D}(t)\mathbf{dA} = \oiint_\Sigma \frac{d\mathbf{D}(t)}{dt}\mathbf{dA} = \frac{dq_\Sigma(t)}{dt}. \tag{5.117}$$

Mărimea

$$\oiint_\Sigma \frac{d\mathbf{D}(t)}{dt}\mathbf{dA} = \oiint_\Sigma \mathbf{J_D dA} = i_D \tag{5.118}$$

este *intensitatea curentului electric de deplasare*, iar

$$\mathbf{J}_D = \frac{d\mathbf{D}}{dt} \tag{5.119}$$

este *densitatea curentului electric de deplasare.*

Mărimea $\frac{dq_\Sigma}{dt}$ reprezintă viteza de creştere a sarcinii electrice libere cuprinsă în interiorul suprafeței Σ. Creşterea sarcinii pozitive din volumul delimitat de suprafața Σ, este posibilă fie prin transportul sarcinilor pozitive din exterior în interiorul suprafeței Σ, fie a sarcinilor negative în sens invers. Acest transport poate fi realizat fie în procesul curentului de conducție i care circulă prin conductorele ce intersectează suprafața Σ, fie în procesul curentului de convecție i_v, când sarcinile electrice sunt transportate prin suprafața Σ de corpuri încărcate. De exemplu, sarcina corpului C (fig. 5.15), poate creşte fie numai la trecerea curentului electric de conducție prin conductorul legat de corp şi care taie suprafața Σ, fie prin transportarea pe corp prin suprafața Σ a sarcinilor electrice. La creşterea sarcinii q_Σ, adică pentru $\frac{dq_\Sigma}{dt} > 0$, sarcinile pozitive trebuie să vină din exterior, prin urmare suma intensităților curenților de conducție i şi de convecție i_v va fi negativă, deoarece am convenit să considerăm pozitiv curentul îndreptat spre exterior. Astfel,

$$\frac{dq_\Sigma}{dt} = -(i + i_v) = -\oiint_\Sigma (\mathbf{J} + \mathbf{J}_v)\mathbf{dA}\ . \tag{5.120}$$

Ținând seama de relațiile (5.117) şi (5.118), relația (5.120) devine:

$$i + i_v + i_D = 0. \tag{5.121}$$

Prin urmare, suma intensităților curenților de conducție, de convecție şi de deplasare care trec prin orice suprafață închisă este egală cu zero.

Notând cu $\mathbf{J}_t$ densitatea totală de curent, egală cu suma densităților curenților de conducție $\mathbf{J}$, de convecție $\mathbf{J}_v$ şi de deplasare $\mathbf{J}_D$,

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_D, \tag{5.122}$$

relația (5.121) se poate scrie şi sub forma:

$$i_t = \oint\!\!\!\oint_\Sigma (\mathbf{J} + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_D)\mathbf{dA} = \oint\!\!\!\oint_\Sigma \mathbf{J}_t \mathbf{dA} = 0\,, \tag{5.123}$$

unde s-a notat cu i_t intensitatea totală a curentului.

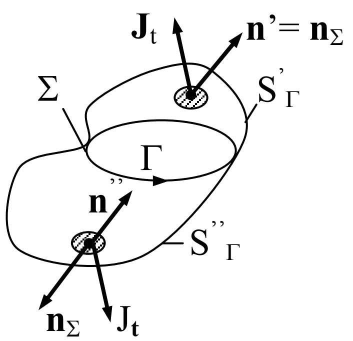
Deci, curentul total care trece prin orice suprafață închisă situată într-un mediu oarecare, este egal cu zero. Totodată, curentul care iese din suprafață se consideră pozitiv, iar curentul care intră în suprafață, negativ.

Aplicând relației (5.123) teorema divergenței, se obține forma locală a legii conservării sarcinii electrice (5.109):

$$\mathrm{div}\mathbf{J}_t = 0\ , \text{ sau } \ \mathrm{div}\left(\mathbf{J} + \rho_v \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{D}}{dt}\right) = 0. \tag{5.124}$$

Din relația (5.124) rezultă că densitatea totală de curent este un vector solenoidal, deci liniile sale de câmp (*linii de curent*) sunt linii închise. Curentul electric circulă întotdeauna pe căi închise.

Deoarece fluxul vectorului $\mathbf{J}_t$ prin suprafața închisă Σ este nul, rezultă că fluxul lui $\mathbf{J}_t$ prin orice suprafață deschisă S_Γ care se sprijină pe o curbă închisă Γ trasată pe suprafața închisă Σ (fig. 5.16) este acelaşi şi deci intensitatea totală a curentului i_{S_Γ} printr-o suprafață deschisă S_Γ



5.16

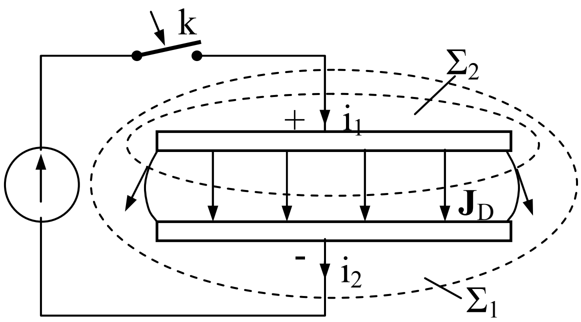
$$i_{S_\Gamma} = \iint_{S_\Gamma} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_D)\mathbf{n}\,dA \tag{5.125}$$

nu depinde decât de curba Γ.

Pentru a reda mai clar rolul curenților de deplasare în problema continuității curentului electric, vom examina procesele care se produc în timpul încărcării unui condensator (fig. 5.17). Presupunem că la momentul $t = 0$, condensatorul neîncărcat se conectează la sursa de tensiune. Condensatorul se încarcă: sarcina electrică, care trece de la o armătură a condensatorului spre cealaltă prin conductorul de legătură, se acumulează pe armături. La mărirea sarcinii pe armături, creşte intensitatea câmpului electric dintre ele şi în dielectric apar curenți de deplasare. Printr-o suprafață închisă Σ_1, care conține în interior ambele armături ale condensatorului, relația $i_\Sigma = 0$ este satisfăcută deoarece curentul i_1 care intră în Σ_1 prin conductorul de conexiune al uneia dintre armături este egal cu curentul i_2 care iese din Σ_1 prin conductorul de conexiune al celeilalte armături,

$$i_1 = i_2. \tag{5.126}$$

Se observă că sarcina totală din interiorul suprafeţei Σ_1 este în fiecare moment nulă, $q_\Sigma = q_1 + q_2 = 0$ şi deci se verifică relaţia (5.100). Dacă se trasează o suprafaţă închisă Σ_2 care închide numai una dintre armături şi intersectează deci numai o conexiune conductoare, prin conductorul de conexiune al armăturii curentul i_1 intră în Σ_2, iar curentul de deplasare care se formează în dielectric trece prin suprafaţa Σ_2 din interior spre exterior. În acest caz trebuie aplicată relaţia (5.100) şi în ecuaţia (5.126) în locul curentului i_2 intervine curentul de deplasare, adică:



5.17

$$i_1 = i_D. \tag{5.127}$$

Liniile curentului de deplasare din dielectric reprezintă prelungirea liniilor curentului de conducţie i_1 din conductorul de conexiune al armăturii. Curentul electric care circulă prin conductorul de conexiune spre armătura pozitivă sub formă de curent de conducţie apare în dielectric sub formă de curent de deplasare şi apoi de la armătura negativă în conductor, iarăşi sub formă de curent de conducţie. Astfel, circuitul de curent este închis.

e. Curentul electric hertzian. Înlocuind în relaţia (5.100) sarcina electrică q_Σ cu fluxul electric din legea fluxului electric (5.15), se obţine:

$$i_\Sigma + \frac{d\Psi_\Sigma}{dt} = 0, \tag{5.128}$$

sau

$$\oint\!\!\oint_\Sigma \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,dA + \frac{d}{dt}\oint\!\!\oint_\Sigma \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,dA = 0\,, \tag{5.129}$$

unde **J** este densitatea curentului electric de conducţie într-un punct pe suprafaţa Σ.

În cazul mediilor în mişcare, se consideră suprafaţa Σ ataşată corpurilor în mişcare; ca urmare, fluxul electric variază în timp atât datorită variaţiei locale în timp a inducţiei electrice, cât şi datorită deplasării mediului. Derivata în raport cu timpul a fluxului electric prin suprafaţa Σ se numeşte *curent electric hertzian* $i_{H\Sigma}$:

$$i_{H\Sigma} = \frac{d\Psi_\Sigma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint\!\!\oint_\Sigma \mathbf{D}\,\mathbf{n}\,dA = \oint\!\!\oint_\Sigma \frac{d_f\mathbf{D}}{dt}\mathbf{n}\,dA = \oint\!\!\oint_\Sigma \mathbf{J}_H\mathbf{n}\,dA\,, \tag{5.130}$$

unde $\frac{d_f\mathbf{D}}{dt}$ este *derivata de flux a inducţiei electrice*, iar $\mathbf{J}_H = \frac{d_f\mathbf{D}}{dt}$ este *densitatea curentului electric hertzian*.

Înlocuind (5.130) în (4.129), se obţine:

$$i_\Sigma + i_{H\Sigma} = 0\,, \tag{5.131}$$

sau

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma}(\mathbf{J}+\mathbf{J}_H)\mathbf{n}\,dA = 0. \tag{5.132}$$

Notând cu $\mathbf{J_t}$ densitatea totală de curent egală cu suma densităților curenților de conducție $\mathbf{J}$ şi hertzian $\mathbf{J}_H$,

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \mathbf{J}_H\ , \tag{5.133}$$

relația (5.132) se poate scrie şi sub forma:

$$i_t = \oint\!\!\oint_{\Sigma}\mathbf{J}_t\mathbf{dA} = \oint\!\!\oint_{\Sigma}(\mathbf{J}+\mathbf{J}_H)\mathbf{n}\,dA = 0\,, \tag{5.134}$$

unde s-a notat cu i_t intensitatea totală a curentului.
Deci, curentul total care trece prin orice suprafață închisă situată într-un mediu oarecare, este egal cu zero.

Relația (5.134) se poate scrie şi sub formă locală:

$$\mathrm{div}\mathbf{J}_t = \mathrm{div}\,(\mathbf{J} + \mathbf{J}_H) = 0. \tag{5.135}$$

Din relația (5.135) rezultă că densitatea totală de curent este un vector solenoidal, deci liniile sale de câmp (*linii de curent*) sunt linii închise. Curentul electric circulă întotdeauna pe căi închise. Relația (5.135) constituie *teorema continuității liniilor de curent*.

Dacă Γ este o curbă închisă trasată pe suprafața închisă Σ şi care separă suprafețele deschise S'_Γ şi S''_Γ $(\Sigma = S'_\Gamma \cup S''_\Gamma)$ (fig. 5.16), având versorii $\mathbf{n}' = \mathbf{n}_\Sigma$ şi $\mathbf{n}'' = -\mathbf{n}_\Sigma$ asociați sensului de referință al curbei Γ, atunci fluxul vectorului $\mathbf{J}_t$ prin suprafața Σ se descompune în diferența fluxurilor prin cele două suprafețe deschise:

$$i_t = \oint\!\!\oint_{\Sigma}\mathbf{J}_t\,\mathbf{n}\,dA = \iint_{S'_\Gamma}\mathbf{J}_t\,\mathbf{n}'dA - \iint_{S''_\Gamma}\mathbf{J}_t\,\mathbf{n}''dA\,, \tag{5.136}$$

iar pentru $i_t = 0$ (5.134), rezultă:

$$\iint_{S'_\Gamma}\mathbf{J}_t\,\mathbf{n}'dA = \iint_{S''_\Gamma}\mathbf{J}_t\,\mathbf{n}''dA\,, \tag{5.137}$$

adică, fluxul vectorului $\mathbf{J}_t$ prin orice suprafață deschisă S_Γ care se sprijină pe curba închisă Γ este acelaşi şi deci intensitatea totală a curentului i_{S_Γ} printr-o suprafață deschisă S_Γ

$$i_{S_\Gamma} = \iint_{S_\Gamma}(\mathbf{J}+\mathbf{J}_H)\mathbf{n}\,dA = \iint_{S_\Gamma}\left(\mathbf{J} + \frac{d_f\mathbf{D}}{dt}\right)\mathbf{n}\,dA \tag{5.138}$$

nu depinde decât de curba Γ.

Suprafața S_Γ este atașată mediului în mișcare locală și derivata de flux $\frac{d_f\mathbf{D}}{dt}$ are expresia (v. relația 5.60):

$$\frac{d_f\mathbf{D}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{v}\,\mathrm{div}\mathbf{D} + \mathrm{rot}(\mathbf{D}\times\mathbf{v}). \tag{5.139}$$

Ținând seama de forma locală a legii fluxului electric, div$\mathbf{D}$ = ρ_v, densitatea curentului hertzian conține trei termeni:

$$\mathbf{J}_H = \frac{d_f\mathbf{D}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho_v\mathbf{v} + \mathrm{rot}(\mathbf{D}\times\mathbf{v}). \tag{5.140}$$

În relația (5.140) intervin următorii termeni:

- termenul $\mathbf{J}_D$,

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{5.141}$$

este *densitatea curentului electric de deplasare*;

- termenul $\mathbf{J}_v$,

$$\mathbf{J}_v = \rho_v\mathbf{v} \tag{5.142}$$

este *densitatea curentului electric de convecție*;

- termenul

$$\mathbf{J}_{Rt} = \mathrm{rot}(\mathbf{D}\ \mathrm{x}\ \mathbf{v}) \tag{5.143}$$

este *densitatea curentului electric Röentgen teoretic*.

Prin urmare, relația (5.134) se poate scrie sub forma:

$$i_t = i_{S_\Gamma} + i_{DS_\Gamma} + i_{vS_\Gamma} + i_{RtS_\Gamma}, \tag{5.144}$$

unde: i_{S_Γ} este intensitatea curentului electric de conducție; i_{DS_Γ} - intensitatea curentului electric de deplasare; i_{vS_Γ} - intensitatea curentului electric de convecție; i_{RtS_Γ} - intensitatea curentului electric Röentgen teoretic.

Relația (5.135), în care se înlocuiește $\mathbf{J}_H$ cu expresia (5.140), devine:

$$\mathrm{div}\left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho_v\mathbf{v} + \mathrm{rot}(\mathbf{D}\times\mathbf{v})\right] = 0. \tag{5.145}$$

Comparând relația (5.145) cu forma locală a legii conservării sarcinii electrice (5.110), se constată că ecuația (5.110) nu conține termenul $\mathbf{J}_{Rt}$ = rot($\mathbf{D}$ x $\mathbf{v}$). Prin urmare, numai din legea conservării sarcinii electrice nu este posibil să se pună în evidență densitatea curentului electric Röentgen teoretic $\mathbf{J}_{Rt}$.

Deoarece divergența rotorului unui vector este identic nulă, relația (5.145) se poate scrie sub forma:

$$\mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+\rho_v \mathbf{v}+\mathrm{rot}(\mathbf{D}\times\mathbf{v})=\mathrm{rot}\,\mathbf{H}, \tag{5.146}$$

unde semnificația vectorului **H** se examinează la paragraful 5.2.3.

5.2.3. Legea circuitului magnetic

Legea circuitului magnetic stabileşte modul de producere a câmpului magnetic de către curentul electric de conducție şi de fluxul electric variabil în timp.

a. Forma integrală a legii circuitului magnetic. În forma integrală, legea circuitului magnetic se enunță în modul următor: *tensiunea magnetomotoare* $u_{m\Gamma}$ *în lungul unei curbe închise* Γ *este egală cu suma dintre intensitatea curentului electric de conducție* i_{S_Γ} *şi viteza de creştere în timp a fluxului electric* Ψ_{S_Γ} *prin orice suprafață* S_Γ:

$$u_{m\Gamma}=\oint_\Gamma \mathbf{H}\,\mathbf{ds}=i_{S_\Gamma}+\frac{d\Psi_{S_\Gamma}}{dt}. \tag{5.147}$$

Suprafața S_Γ este ataşată mediului în mişcare locală şi derivata în raport cu timpul a fluxului electric prin suprafața S_Γ reprezintă intensitatea curentului electric hertzian i_{HS_Γ} (v. par. 5.2.2, e):

$$i_{HS_\Gamma}=\frac{d\Psi_{S_\Gamma}}{dt}=\frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma}\mathbf{D}\,\mathbf{dA}=\iint_{S_\Gamma}\frac{d_f\mathbf{D}}{dt}\mathbf{dA}=$$

$$=\iint_{S_\Gamma}\left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+\rho_v\,\mathbf{v}+\mathrm{rot}(\mathbf{D}\times\mathbf{v})\right]\mathbf{dA}=i_{DS_\Gamma}+i_{vS_\Gamma}+i_{RtS_\Gamma}. \tag{5.148}$$

Prin urmare, forma integrală dezvoltată a legii circuitului magnetic este:

$$u_{m\Gamma}=\oint_\Gamma \mathbf{Hds}=i_{S_\Gamma}+i_{DS_\Gamma}+i_{vS_\Gamma}+i_{RtS_\Gamma}\ , \tag{5.149}$$

unde: i_{S_Γ} este intensitatea curentului electric de conducție; i_{DS_Γ} - intensitatea curentului de deplasare; i_{vS_Γ} - intensitatea curentului de convecție; i_{RtS_Γ} - intensitatea curentului Röentgen teoretic.
În medii imobile, **v** = 0, ecuația (5.149) are forma:

$$u_{m\Gamma}=\oint_\Gamma \mathbf{Hds}=i_{S_\Gamma}+i_{DS_\Gamma}. \tag{5.150}$$

Legea circuitului magnetic stabileşte faptul că cei patru curenți care intervin în relația (5.149) îşi asociază întotdeauna un câmp magnetic propriu. Efectele magnetice ale curenților electrici de conducție au fost observate încă de la începutul secolului trecut (Oersted, 1819), iar în 1876, Rowland verifică existența unor efecte magnetice ale curenților de convecție. Curentul de deplasare exprimă cantitativ faptul că un câmp electric variabil în timp produce un câmp magnetic – fapt confirmat de experiențele lui Hertz (1888) privitoare la producerea undelor electromagnetice. Röentgen a încercat – fără succes, de altfel – să măsoare experimental efecte magnetice compatibile cu expresia curentului care îi poartă numele. Rezultatele experimentale au arătat că în expresia curentului Röentgen teoretic în locul inducției electrice **D** ar trebui să figureze polarizația **P**. Această neconcordanță a constituit primul insucces notabil al teoriei macroscopice clasice a electromagnetismului. Pentru aplicațiile tehnice curente, această neconcordanță nu prezintă însă importanță practică, astfel încât poate fi ignorată.

Prezența curentului Röentgen teoretic în expresia legii circuitului magnetic trebuie interpretată în sensul că şi corpurile polarizate în mişcare produc efecte magnetice.

b. Forma locală a legii circuitului magnetic. Pentru domeniile de continuitate, aplicând teorema lui Stokes membrului stâng al ecuației (5.147), se obține:

$$\iint_{S_\Gamma} \mathrm{rot}\mathbf{H}\,\mathbf{dA} = \iint_{S_\Gamma} \left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho_v\,\mathbf{v} + \mathrm{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \right] \mathbf{dA} \tag{5.151}$$

Identificând integranzii din relația (5.151), se obține *forma locală a legii circuitului magnetic*:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho_v \mathbf{v} + \mathrm{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v}). \tag{5.152}$$

În medii imobile, $\mathbf{v} = 0$, ecuația (5.152) devine:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{5.153}$$

c. Forma locală a legii circuitului magnetic pe suprafețe de discontinuitate.

Medii imobile. Fie S_d o suprafață de discontinuitate a câmpului magnetic care separă domeniile 1 şi 2 şi fie două puncte infinit apropiate de S_d în care intensitățile câmpului magnetic $\mathbf{H}_1$ şi $\mathbf{H}_2$ sunt diferite (fig. 4.27). Se consideră conturul Γ de formă dreptunghiulară cu laturile Δs şi Δh. Prin suprafața S_Γ solenația θ_{S_Γ} corespunde curentului electric de conducție repartizat cu densitate de volum **J** şi cu densitatea pânzei de curent $\mathbf{J}_l$. Tensiunea magnetomotoare se calculează cu relația (5.147):

$$\mathbf{H}_2\,\mathbf{t}\,\Delta s - \mathbf{H}_1\,\mathbf{t}\,\Delta s = \mathbf{J}\,\mathbf{n}\,\Delta h\,\Delta s + \mathbf{J}_l\,\mathbf{t}\,\Delta s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{n}\,\Delta h\,\Delta s, \tag{5.154}$$

unde **t** este versorul tangențial la S_d, iar **n** este versorul normalei la suprafața S_Γ.

La limită, pentru $\Delta h \to 0$, se obține:

$$H_{2t} - H_{1t} = J_l . \tag{5.155}$$

Pe suprafața de discontinuitate a câmpului magnetic care separă două medii imobile, diferența componentelor tangențiale ale intensităților câmpului magnetic este egală cu densitatea de suprafață a curentului electric de conducție.
Relația (5.155) se poate scrie şi sub forma:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_l . \tag{5.156}$$

şi reprezintă *forma locală a legii circuitului magnetic pentru medii imobile pe suprafețe de discontinuitate*.
Dacă $\mathbf{J}_l = 0$, ecuația (5.155) devine:

$$H_{1t} = H_2. \tag{5.157}$$

Pe suprafața de discontinuitate a câmpului magnetic care separă două medii imobile pe care densitatea de curent este nulă, se conservă componentele tangențiale ale intensității câmpului magnetic.

Medii în mişcare. Fie S_d o suprafață care separă două medii în mişcare şi fie $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ vitezele punctelor situate în imediata vecinătate a lui S_d în care intensitățile câmpului magnetic, inducțiile electrice şi densitățile de sarcină electrică au valori diferite. Tensiunea magnetomotoare se calculează cu relația (5.149) şi la limită pentru $\Delta h \to 0$ se obține:

$$H_{2t} - H_{1t} = J_{lt} + \rho_{A_2} v_{2t} - \rho_{A_1} v_{1t} + (\mathbf{D}_2 \times \mathbf{v}_2)\mathbf{t} - (\mathbf{D}_1 \times \mathbf{v}_1)\mathbf{t} . \tag{5.158}$$

Relația (5.158) constituie *forma locală a legii circuitului magnetic pentru medii în mişcare pe suprafețe de discontinuitate*.

d. Teorema refracției liniilor de câmp magnetic. Fie o suprafață de discontinuitate pentru liniile câmpului magnetic, care separă două medii pentru care relația dintre inducția magnetică şi intensitatea câmpului magnetic este de forma: $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Efectuând raportul membru cu membru al relațiilor formelor locale pe suprafețe de discontinuitate a legilor fluxului magnetic (5.54) şi circuitului magnetic pentru medii imobile (5.157), se obține:

$$\frac{\mu_1 H_{1n}}{H_{1t}} = \frac{\mu_2 H_{2n}}{H_{2t}} . \tag{5.159}$$

Deoarece $H_{1n}/H_{1t} = \mathrm{tg}\alpha_1$ şi $H_{2n}/H_{2t} = \mathrm{tg}\alpha_2$, unde α_1 şi α_2 sunt unghiurile pe care le formează cu normala intensitățile câmpului magnetic în cele două medii, rezultă:

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} . \tag{5.160}$$

Relația (5.160) constituie *teorema refracției liniilor de câmp magnetic*: *la trecerea dintr-un mediu cu permeabilitatea* μ_1 *într-un mediu cu permeabilitatea* μ_2, *raportul tangentelor unghiurilor de incidență* α_1 *şi de refracție* α_2 *este egal cu raportul permeabilităților*.

5.3. TEOREMELE GENERALE ALE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

Din legile generale şi de material ale câmpului electromagnetic se deduc teoreme, dintre care cele mai importante sunt:

- teorema energiei electromagnetice;
- teorema acţiunilor ponderomotoare;
- teorema de unicitate a câmpului electromagnetic;

5.3.1. Teorema energiei electromagnetice

Trecerea unui sistem fizic printr-o transformare dintr-o stare în altă stare este însoţită de schimbări în exteriorul sistemului (de poziţie, de viteză, modificări ale stărilor electrică, magnetică, termică etc.). Aceste schimbări se numesc acţiuni externe ale sistemului fizic în cursul transformării dintre cele două stări. Dacă acţiunile externe sunt produse numai prin efectuare de lucru mecanic, acesta se numeşte *echivalentul în lucru mecanic al acţiunilor externe*. Suma echivalenţilor în lucru mecanic ai tuturor acţiunilor externe care se produc la trecerea printr-o transformare a unui sistem fizic dintr-o stare dată într-o stare de referinţă, se numeşte *energia* W a sistemului fizic în starea dată faţă de starea de referinţă S_0. În conformitate cu principiul de conservare a energiei, energia unui sistem fizic este independentă de transformarea dintre cele două stări şi se poate exprima exclusiv în funcţie de valorile mărimilor de stare ale sistemului în cele două stări; prin alegerea valorii energiei în starea de referinţă, energia într-o altă stare este complet determinată. Până la o constantă arbitrară, energia este o funcţie de starea sistemului fizic şi prin alegerea constantei energia într-o stare dată poate fi pozitivă, negativă sau nulă. După natura mărimilor de stare de care depinde fiecare dintre termenii aditivi din expresia generală a energiei totale, energia este mecanică, electrică, magnetică etc., fiecare dintre aceşti termeni fiind o formă de energie. În conformitate cu teoria acţiunii din aproape în aproape, acţiunile fizice sunt localizate şi deoarece energia este o funcţie de starea sistemelor fizice, rezultă că energia depinde exclusiv de mărimi de stare locală.

Termenul aditiv din expresia generală a variaţiei energiei unui sistem fizic, raportată la o stare de referinţă care diferă de starea considerată exclusiv prin valorile mărimilor de stare locală şi instantanee ale câmpului electromagnetic se numeşte *energie electromagnetică* W_{em}. În general, starea de referinţă S_0 se caracterizează prin valori nule ale mărimilor de stare ale câmpului electromagnetic. Pentru a aduce un sistem fizic din starea de referinţă într-o altă stare care diferă exclusiv prin valorile mărimilor de stare locală şi instantanee ale câmpului electromagnetic, trebuie efectuate din exteriorul sistemului acţiuni al căror echivalent în lucru mecanic este egal cu energia electromagnetică în starea considerată. În acord cu concepţia modernă asupra noţiunii de câmp şi cu conceptul privind transmiterea din aproape în aproape a acţiunilor sale, energia electromagnetică W_{em} este distribuită în domeniul v_Σ din spaţiu cu *densitatea de volum* w_{em},

$$w_{em} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta W_{em}}{\Delta v} = \frac{dW_{em}}{dv}. \tag{5.161}$$

Densitatea de volum a energiei electromagnetice este o mărime de descriere locală a anumitor proprietăţi ale câmpului. Prin urmare, în mod necesar ea trebuie exprimată în funcţie de mărimile de stare locală ale câmpului electromagnetic (E, D, B **şi** H**). Modul concret în care se realizează această descriere rezultă din teorema generală a energiei electromagnetice.**

Starea de referinţă S_0 se alege în funcţie de proprietăţile de material ale mediului astfel:

- **în mediile cu polarizaţie temporară şi reversibilă, în care anularea lui** E **şi** H **implică anularea lui** D **şi** B**, starea de referinţă S_0 este caracterizată de valori nule,** E = **0,** D = **0,** H = **0,** B = **0;**
- **în mediile care au şi o polarizaţie permanentă, în care anularea lui** E **şi** H **nu implică anularea lui** D **şi** B**, starea de referinţă S_0 este caracterizată numai de valorile nule,** E = **0 şi** H = **0.**

Se consideră domeniul v_Σ, mărginit de suprafaţa închisă Σ, în interiorul căruia se găsesc corpuri încărcate cu sarcini electrice şi polarizate electric, conductoare parcurse de curenţi electrici şi corpuri magnetizate.

Dacă se multiplică scalar ambii membri ai ecuaţiei legii inducţiei electromagnetice (5.68) cu **H** şi ai ecuaţiei legii circuitului magnetic (5.153) cu **E**, ambele ecuaţii scrise pentru medii imobile, se obţine:

$$\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{5.162}$$

$$\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{E}\,\mathbf{J} + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{5.163}$$

Se scade ecuaţia (5.162) din ecuaţia (5.163) şi rezultă:

$$\mathbf{E}\;\mathrm{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\,\mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{E}\,\mathbf{J} + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{5.164}$$

sau

$$-\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{E}\,\mathbf{J} + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{5.165}$$

Multiplicând ambii membri ai relaţiei (5.165) cu dvdt şi integrând pe v_Σ în raport cu timpul de la 0 la t, se obţine:

$$-\int_0^t dt \iiint_{v_\Sigma} \mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})dv = \int_0^t dt \iiint_{v_\Sigma} \mathbf{E}\,\mathbf{J}\,dv + \int_0^t dt \iiint_{v_\Sigma}\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)dv. \tag{5.166}$$

Dacă se aplică teorema divergenței primului membru al relației (5.166) şi se înlocuieşte versorul normalei exterioare **n** cu versorul luat cu semn schimbat al normalei interioare **-n**$_i$, se deduce relația:

$$\int_0^t dt \oiint_\Sigma (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\mathbf{n}_i dA = \int_0^t dt \iiint_{v_\Sigma} \mathbf{E}\,\mathbf{J}\,dv + \int_{S_0} \iiint_{v_\Sigma} (\mathbf{E}d\mathbf{D} + \mathbf{H}d\mathbf{B})dv\,, \qquad (5.167)$$

numită *integrala de energie a câmpului electromagnetic.*

În acord cu primul principiu al termodinamicii, energia elementară transferată sistemului din exterior dW_Σ, prin suprafața Σ este egală cu suma dintre energia elementară δQ_J transformată în conductoarele situate în v_Σ, lucrul mecanic elementar δL şi creşterea energiei electromagnetice interioare dW_{em},

$$dW_\Sigma = \delta Q_J + \delta L + dW_{em}\ . \qquad (5.168)$$

Mediile fiind imobile, $\delta L = 0$ şi identificând ecuațiile (4.191) şi (4.192), rezultă:

- Termenul W_Σ în expresia căruia intervin numai mărimi de stare locală şi instantanee a câmpului electromagnetic,

$$W_\Sigma = \oiint_\Sigma \int_0^t (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\mathbf{n}_i\, dA\, dt \qquad (5.169)$$

reprezintă *energia electromagnetică transferată sau transmisă* sistemului din exterior prin suprafața Σ, iar energia transferată în unitatea de timp P_Σ,

$$P_\Sigma = \frac{dW_\Sigma}{dt} = \oiint_\Sigma (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\mathbf{n}_i\, dA \qquad (5.170)$$

reprezintă puterea electromagnetică transmisă sistemului din exterior prin suprafața Σ. Vectorul $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ se numeşte *vectorul lui Poynting* şi relațiile (5.169), (5.170) se pot scrie sub forma:

$$W_\Sigma = \oiint_\Sigma \int_0^t \mathbf{S}\,\mathbf{n}_i\, dA\, dt\ ;\ \ P_\Sigma = \oiint_\Sigma \mathbf{S}\,\mathbf{n}_i\, dA\,; \qquad (5.171)$$

- Termenul Q_J,

$$Q_J = \iiint_{v_\Sigma} \int_0^t \mathbf{E}\,\mathbf{J}\, dv\, dt \qquad (5.172)$$

reprezintă *energia transformată în conductoare* (în acord cu legea transformării energiei în conductoare). Cu relația $p_J = \mathbf{EJ} = \rho J^2$ rezultă puterea transformată în conductoare:

$$P_J = \frac{dQ_J}{dt} = \iiint_{v_\Sigma} p_J dv\ . \qquad \mathbf{(5.173)}$$

Pentru conductoarele liniare şi omogene $p_J = \rho J^2 = \sigma E^2$ şi Q_J reprezintă energia transformată în căldură prin efect electrocaloric Joule – Lenz;

- Termenul W_{em},

$$W_{em} = W_e + W_m, \tag{5.174}$$

se numeşte *energie electromagnetică interioară* şi este egală cu suma a doi termeni:

$$W_e = \iiint_{v_\Sigma} dv \int_{S_0} \mathbf{E}\, d\mathbf{D}; \quad W_m = \iiint_{v_\Sigma} dv \int_{S_0} \mathbf{H}\, d\mathbf{B}, \tag{5.175}$$

unde W_e este *energia electrică interioară* şi W_m este *energia magnetică interioară*.

Densităţile de volum ale energiilor electromagnetică w_{em}, *electrică* w_e şi *magnetică* w_m sunt:

$$w_{em} = \int_{S_0} (\mathbf{E}\, d\mathbf{D} + \mathbf{H}\, d\mathbf{B}); \quad w_e = \int_{S_0} \mathbf{E}\, d\mathbf{D}; \quad w_m = \int_{S_0} \mathbf{H}\, d\mathbf{B}. \tag{5.176}$$

Dacă mediile sunt liniare, izotrope şi fără polarizaţii permanente, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, expresiile energiilor şi densităţilor de energie devin:

$$W_{em} = \iiint_{v_\Sigma} \left(\frac{\mathbf{E}\,\mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H}\,\mathbf{B}}{2} \right) dv; W_e = \iiint_{v_\Sigma} \frac{\mathbf{E}\,\mathbf{D}}{2} dv; W_m = \iiint_{v_\Sigma} \frac{\mathbf{H}\,\mathbf{B}}{2} dv. \tag{5.177}$$

$$w_{em} = \frac{\mathbf{E}\,\mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H}\,\mathbf{B}}{2}; \quad w_e = \frac{\mathbf{E}\,\mathbf{D}}{2}; \quad w_m = \frac{\mathbf{H}\,\mathbf{B}}{2} . \tag{5.178}$$

Relaţia (5.167) reprezintă *teorema generală a energiei electromagnetice pentru medii imobile*: *fluxul de energie electromagnetică* W_Σ *transmis unui sistem fizic din exteriorul lui prin suprafaţa* Σ *este egal cu suma dintre energia transformată* Q_J şi *creşterea energiei electromagnetice interioare* W_{em}.

5.3.2. Căldura dezvoltată la parcurgerea ciclurilor de histerezis. Teorema lui Warburg.

Se consideră o suprafaţă Σ în interiorul căreia se află corpuri feroelectrice şi feromagnetice imobile. Integrala de energie (5.167) se poate scrie sub forma:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{S}\, \mathbf{n}_i\, dA = \iiint_{v_\Sigma} \mathbf{E}\,\mathbf{J}\, dv + \iiint_{v_\Sigma} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dv . \tag{5.179}$$

Primul termen din membrul al doilea al relaţiei (5.179) este egal cu suma căldurilor dezvoltate în unitatea de timp în domeniul v_Σ prin efectele Joule P_J, Peltier P_P, Thomson P_T şi puterii transformate din forma electromagnetică în chimică sau invers P_C:

$$\iiint_{v_\Sigma} \mathbf{E}\,\mathbf{J}\,dv = P_J + P_P + P_T + P_C\ . \tag{5.180}$$

În acord cu primul principiu al termodinamicii, energia transmisă în unitatea de timp prin suprafața Σ are expresia:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{S}\,\mathbf{n}_i\,dA = P_J + P_P + P_T + P_C + P_e + P_m + \frac{\partial W_e}{\partial t} + \frac{\partial W_m}{\partial t}, \tag{5.181}$$

unde W_e şi W_m sunt energiile electrică şi magnetică localizate în v_Σ, iar P_e şi P_m sunt puterile dezvoltate în corpurile feroelectrice şi feromagnetice ca urmare a variației polarizației electrice şi magnetizației. Identificând (5.180) şi (5.181) rezultă:

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} + P_e + \frac{\partial W_m}{\partial t} + P_m = \iiint_{v_\Sigma} (\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})\,dv\,. \tag{5.182}$$

Dacă transformarea se efectuează numai cu corpuri feroelectrice se obține:

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} + P_e = \iiint_{v_\Sigma} \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,dv\,. \tag{5.183}$$

Multiplicând ambii membri cu dt şi integrând pe durata unui ciclu C_e de histerezis, rezultă:

$$\oint_{C_e} \frac{\partial W_e}{\partial t}\,dt + \iiint_{v_\Sigma} P_e dt = \iiint_{v_\Sigma} dv \oint_{C_e} \mathbf{E}\,d\mathbf{D}\ . \tag{5.184}$$

Ținând seama de legea legăturii dintre **D**, **E** şi **P**, $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$, relația (5.184) devine:

$$\oint_{C_e} \frac{\partial W_e}{\partial t}\,dt + \iiint_{v_\Sigma} P_e dt = \varepsilon_{\mathbf{0}} \iiint_{v_\Sigma} dv \oint_{C_e} \mathbf{E}\,d\mathbf{E} + \iiint_{v_\Sigma} dv \oint_{C_e} \mathbf{E}\,d\mathbf{P}\,. \tag{5.185}$$

La parcurgerea unui ciclu complet, rezultă:

$$\oint_{C_e} dW_e = 0\ ;\ \oint_{C_e} \mathbf{E}\,\mathbf{dE} = \frac{1}{2}\oint_{C_e} dE^2 = 0\ . \tag{5.186}$$

Ținând seama de relațiile (5.185) şi (5.186), rezultă că în corpurile feroelectrice se dezvoltă pe durata unui ciclu de polarizare electrică cantitatea de căldură

$$Q_e = \oint_{C_e} P_e\,dt = \iiint_{v_\Sigma} dv \oint_{C_e} \mathbf{E}\,\mathbf{dP} = \iiint_{v_\Sigma} A_{EP}\,dv \tag{5.187}$$

proporțională cu aria ciclului A_{EP}.

Procedând la fel pentru o transformare efectuată numai cu corpuri feromagnetice se obține căldura Q_m dezvoltată la parcurgerea unui ciclu de magnetizare, A_{HM} fiind aria acestuia:

$$Q_m = \oint_{C_m} P_m \, dt = \mu_0 \iiint_{v_\Sigma} dv \oint_{C_m} \mathbf{H} \, d\mathbf{M} = \mu_0 \iiint_{v_\Sigma} A_{HM} \, dv . \qquad (5.188)$$

Relațiile (5.187) şi (5.188) constituie teorema lui Warburg.

5.3.3. Teorema energiei electrostatice

În medii neliniare, energia localizată în câmpul electrostatic este dată de relația (5.175_1):

$$W_e = \iiint_{v_\infty} dv \int_{S_0} \mathbf{E} \, d\mathbf{D} \qquad (5.189)$$

Din relația (5.189) rezultă că energia câmpului electrostatic este localizată în dielectric (unde există câmp electric) şi nu în conductoare (unde câmpul este nul).

În relația (5.189), integrala de volum se extinde asupra domeniului infinit extins, v_∞, iar S_0 indică faptul că integrala corespunzătoare se efectuează plecând de la valorile care caracterizează starea de referință S_0 şi care se alege în funcție de proprietățile de material ale mediului. În medii cu polarizație temporară şi reversibilă sau în vid, în care anularea lui **E** implică şi anularea lui **D**, starea de referință S_0 este caracterizată prin valori nule ale mărimilor de stare, **E** = 0, **D** = 0. În medii cu polarizație permanentă, în care anularea lui **E** nu implică şi anularea lui **D**, starea de referință S_0 este caracterizată numai de valoarea nulă a lui **E**, **E** = 0 (**D** $\neq$0).

În medii cu polarizație temporară şi reversibilă sau în vid, densitatea de volum a energiei electrice se calculează efectuând integrala de la valoarea nulă a intensității câmpului electric pentru care inducția electrică este nulă, până la valoarea $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_t$:

$$w_e = \int_{E=0}^{D=\varepsilon_0 E + P_t} \mathbf{E} \, d\mathbf{D} , \qquad (5.190)$$

Densității de volum a energiei w_e îi corespunde aria cuprinsă între curba D(E) şi axa OD (fig. 5.18). Integrând prin părți membrul al doilea al relației (5.190), se obține:

$$w_e = \int_{E=0}^{D=\varepsilon_0 E + P_t} \mathbf{E} \, d\mathbf{D} = \mathbf{E}\,\mathbf{D} - \int_{E=0}^{E=(D-P_t)/\varepsilon_0} \mathbf{D} \, d\mathbf{E} . \qquad (5.191)$$

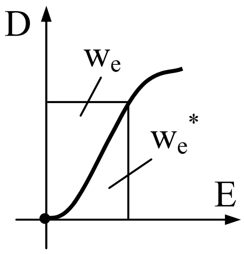


Fig. 5.18

Termenul

$$w_e^* = \int_{E=0}^{E=(D-P_t)/\varepsilon_0} \mathbf{D}\,d\mathbf{E} \qquad (5.192)$$

se numeşte *densitate de volum a energiei electrice complementară* (prescurtat *coenergie*) şi este egal cu aria cuprinsă între curba D(E) şi axa OE (fig. 5.18).
În medii liniare, $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ şi relaţia (5.190) devine:

$$w_e = \int_{E=0}^{D=\varepsilon E} \varepsilon\mathbf{E}d\mathbf{E} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\mathbf{ED} = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}, \qquad (5.193)$$

adică densităţile de volum ale energiei w_e şi w_e^* au expresii identice.

Energia de interacţiune a conductoarelor încărcate cu sarcini electrice. Se consideră un sistem de n conductoare încărcate cu sarcinile electrice q_k şi dispuse într-un dielectric care ocupă volumul $v_{\Sigma\Sigma_k}$ limitat de suprafaţa închisă Σ şi de suprafeţele Σ_k ale celor n conductoare (fig. 5.19). Dielectricul este neîncărcat electric şi fără polarizaţie permanentă.

În medii liniare, densitatea de volum a energiei localizate în câmpul electrostatic al acestor conductoare este dată de relaţia (5.193). Ţinând seama de teorema potenţialului electrostatic (2.238), se obţine:

$$w_e = \frac{1}{2}\mathbf{D}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{2}\mathbf{D}\,\mathrm{grad}V = -\frac{1}{2}\mathrm{div}(V\,\mathbf{D}) + \frac{1}{2}V\,\mathrm{div}\mathbf{D}, \qquad (5.194)$$

unde s-a utilizat identitatea:

$$\mathrm{div}(V\,\mathbf{D}) = V\,\mathrm{div}\mathbf{D} + \mathbf{D}\,\mathrm{grad}V. \qquad (5.195)$$

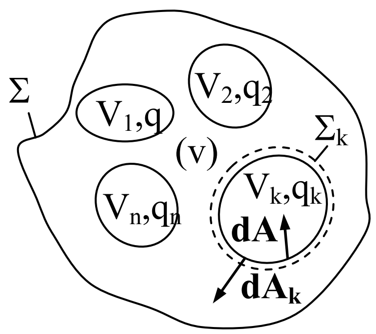


Fig. 5.19

Pentru a calcula energia totală a câmpului electrostatic al conductoarelor încărcate, se integrează expresia (5.194) pe volumul ocupat de dielectric şi se ţine seama de faptul că în volumul $v_{\Sigma\Sigma_k}$ al dielectricului nu există sarcini electrice adevărate, adică div**D**=0,

$$W_e = -\frac{1}{2}\iiint_{v_{\Sigma\Sigma_k}} \mathrm{div}(V\,\mathbf{D})dv. \qquad (5.196)$$

Integrala $\iiint_{v_{\Sigma\Sigma_k}} \mathrm{div}(V\,\mathbf{D})dv$ pe volumul $v_{\Sigma\Sigma_k}$ ocupat de dielectric, se poate transforma într-o integrală de suprafaţă considerând domeniul $v_{\Sigma\Sigma_k}$ limitat atât de suprafaţa Σ a domeniului cât şi de suprafeţele Σ_k ale celor n conductoare:

$$W_e = -\frac{1}{2}\iiint_{v_{\Sigma\Sigma_k}} \mathrm{div}(V\,\mathbf{D})dv = -\frac{1}{2}\oint\!\!\oint_{\Sigma} V\,\mathbf{D}\,d\mathbf{A} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint\!\!\oint_{\Sigma_k} V_k\,\mathbf{D}_k\,d\mathbf{A}_k. \qquad (5.197)$$

Semnul integralelor pe suprafețele Σ_k s-a schimbat datorită faptului că versorul normalei pozitive la suprafețele Σ_k este orientat spre exteriorul acestora, în timp ce, în raport cu domeniul $v_{\Sigma\Sigma_k}$ este orientat spre interiorul suprafețelor Σ_k (fig. 5.19).

Se consideră că suprafața Σ este extinsă la infinit, $\Sigma \to \Sigma_\infty$, (adică cuprinde întreg spațiul v_∞). Deoarece corpurile încărcate cu sarcini electrice se află la distanță finită, mărimile de stare ale câmpului sunt nule pe suprafața de la infinit şi primul termen al membrului al doilea al relației (5.197) este nul,

$$\oiint_{\Sigma_\infty} V\,\mathbf{D}\,\mathbf{dA} = 0 . \tag{5.198}$$

Deoarece, fiecare dintre conductoare constituie un domeniu echipotențial (în punctele suprafeței Σ_k potențialul are valoare constantă) şi ținând seama de relația (5.198), expresia energiei electrostatice (5.197) devine:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k \oiint_{\Sigma_k} \mathbf{D}_k\,\mathbf{dA}_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k\, q_k , \tag{5.199}$$

unde s-a utilizat legea fluxului electric (5.15).

Cu ajutorul relației (5.199) se poate calcula energia electrostatică a unui condensator de capacitate C. În acest caz, sistemul are două conductoare (armăturile condensatorului) încărcate cu sarcinile $q_1 = q$, $q_2 = -q$ şi având potențialele V_1 şi V_2. Rezultă:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} V_k\, q_k = \frac{1}{2}\left(q_1 V_1 + q_2 V_2\right) = \frac{1}{2} q\left(V_1 - V_2\right) = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} . \tag{5.200}$$

Energia electrostatică, fie scrisă sub forma de interacțiune a sarcinilor electrice, fie sub forma care pune în evidență localizarea în domeniul câmpului, este pozitiv definită şi se anulează odată cu anularea câmpului electric.

5.3.4 Teorema energiei magnetice

În paragraful 5.3.1 s-a stabilit expresia energiei câmpului magnetic,

$$W_m = \iiint_{v_\infty} \int_{S_0} \mathbf{H}\,\mathbf{dB}\,dv = \iiint_{v_\infty} w_m dv , \tag{5.201}$$

unde integrala de volum se extinde asupra domeniului infinit extins, v_∞.

Relația (5.201) pune în evidență localizarea energiei câmpului magnetic în domeniul câmpului. În relația (5.201), S_0 indică faptul că integrala corespunzătoare se efectuează plecând de la valorile care caracterizează starea de referință S_0 şi care se alege în funcție de proprietățile de material ale mediului. În medii cu magnetizație temporară şi reversibilă sau în vid, în care anularea lui **H** implică şi anularea lui **B**, starea de referință S_0 este caracterizată prin valori nule ale mărimilor de stare, **H** = 0, **B** = 0. În medii cu magnetizație permanentă, în care anularea lui **H** nu implică şi anularea lui **B**, starea de referinţă S_0 este caracterizată numai de valoarea nulă a lui **H**, **H** = 0 (**B** ≠0).

În medii cu magnetizaţie temporară şi reversibilă sau în vid, densitatea de volum a energiei magnetice se calculează efectuând integrala de la valoarea nulă a intensităţii câmpului magnetic pentru care inducţia magnetică este nulă, până la valoarea $\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{H} + \mathbf{M}_t\right)$:

$$w_m = \int_{B=0(H=0)}^{B=\mu_0(H+M)} \mathbf{H}\,\mathbf{dB}, \tag{5.202}$$

Densităţii de volum a energiei magnetice w_m îi corespunde aria cuprinsă între curba B(H) şi axa OB (fig. 5.20). Integrând prin părţi membrul al doilea al relaţiei (5.202), se obţine:

$$w_m = \int_{B=0(H=0)}^{B=\mu_0(H+M_t)} \mathbf{H}\,\mathbf{dB} = \mathbf{H}\,\mathbf{B} - \int_{H=0}^{H=B/\mu_0-M_t} \mathbf{B}\,\mathbf{dH}. \tag{5.203}$$

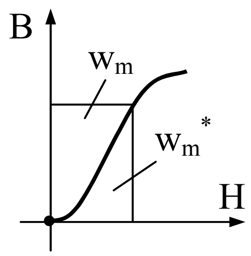


Fig. 5.20

Termenul

$$w_m^* = \int_{H=0}^{H=B/\mu_0-M_t} \mathbf{B}\,\mathbf{dH} \tag{5.204}$$

se numeşte *densitate de volum a energiei magnetice complementare* (prescurtat *coenergie*) şi este egal cu aria cuprinsă între curba B(H) şi axa OH (fig. 5.20).

În medii liniare, **B** = μ**H** şi relaţia (5.204) devine:

$$w_m = \int_0^H \mu\,\mathbf{H}\,\mathbf{dH} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\mathbf{H}\,\mathbf{B} = \frac{1}{2\mu}B^2, \tag{5.205}$$

adică densităţile de volum ale energiilor w_m şi w_m^* sunt egale.

Observaţie. Raportul dintre densităţile de volum ale energiilor magnetică şi electrică în aer este:

$$\frac{w_m}{w_e} = \frac{\dfrac{B^2}{2\mu_0}}{\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{B^2}{E^2}.$$

Deoarece intensitatea câmpului electric este maximă în aer la nivelul unei valori a rigidităţii dielectrice E = 30 KV/cm, iar inducţia magnetică maximă este limitată de saturaţia magnetică a materialelor feromagnetice la valoarea B = 1T, rezultă:

$$\frac{w_m}{w_e} = \frac{4\cdot\pi\cdot 9\cdot 10^9}{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\cdot 9\cdot 10^{12}} = 10^4,$$

adică densitatea de volum a energiei magnetice în aer este de 10^4 ori mai mare decât densitatea de volum a energiei electrice în aer. Din acest motiv se preferă *sistemele de conversie electromecanică în care energia este localizată sub formă magnetică.*

Energia magnetică de interacțiune a curenților. **Se consideră un sistem de n conductoare filiforme imobile, parcurse de curenți de conducție de intensitate i_k (k = 1, 2, …, n), situate într-un mediu liniar din punct de vedere magnetic şi infinit extins.**

Ținând seama de posibilitatea exprimării inducției magnetice **B** în funcție de potențialul magnetic vector **A** (4.286) , expresia densității de volum a energiei magnetice (5.205) devine:

$$w_m = \frac{1}{2}\mathbf{H}\,\mathbf{B} = \frac{1}{2}\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathrm{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{H}) + \frac{1}{2}\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\mathbf{H} = .$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{H}) + \frac{1}{2}\mathbf{A}\,\mathbf{J}. \tag{5.206}$$

Energia totală a câmpului magnetice se obține integrând relația (5.206) pe domeniul infinit v_∞ din care se elimină domeniile de discontinuitate ale câmpului, adică volumele ocupate de conductoarele filiforme. Acest domeniu este limitat de suprafața de la infinit Σ_∞ şi de cele n suprafețe Σ_k care îmbracă strâns conductoarele filiforme (fig. 5.21). În acest domeniu neexistând curenți electrici de conducție (**J** = 0), expresia energiei magnetice (5.206) devine:

$$W_m = \iiint_{v_\infty} w_m \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\iiint_{v_\infty} \mathrm{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{H})\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{2}\oint\!\!\oint_{\Sigma_\infty}(\mathbf{A}\times\mathbf{H})\mathbf{n}\,\mathrm{d}A - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint\!\!\oint_{\Sigma_k}(\mathbf{A}\times\mathbf{H})\mathbf{n}_k\,\mathrm{d}A_k\,. \tag{5.207}$$

Semnul minus în fața celui de-al doilea termen din membrul doi al relației (5.207) apare datorită faptului că versorul normalei pozitive la suprafețele Σ_k este orientat spre exteriorul acestora, în timp ce, în raport cu domeniul v_∞ este orientat spre interiorul suprafețelor Σ_k (fig. 5.21). Deoarece circuitele parcurse de curenți se află la distanță finită, mărimile de stare ale câmpului sunt nule pe suprafața de la infinit şi deci:

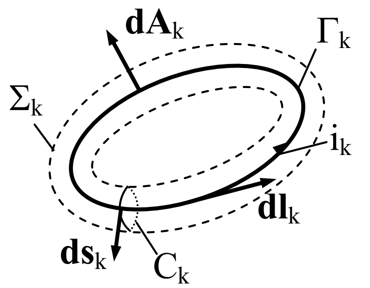


Fig. 5.21

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_\infty}(\mathbf{A}\times\mathbf{H})\mathbf{n}\,\mathrm{d}A = 0. \tag{5.208}$$

Notând cu $\mathbf{dl}_k$ elementul de lungime al curbei Γ_k a conductorului filiform şi cu $\mathbf{ds}_k$ ($\mathbf{ds}_k \perp \mathbf{dl}_k$) elementul de lungime pe curba închisă C_k ce delimitează o secțiune normală a conductorului filiform, elementul de arie $\mathbf{dA}_k$ se poate exprima sub forma $\mathbf{dA}_k = \mathbf{ds}_k \times \mathbf{dl}_k$ şi relația (5.207) devine:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oiint_{\Sigma_k}(\mathbf{H}\times\mathbf{A})(\mathbf{ds}_k\times\mathbf{dl}_k). \tag{5.209}$$

Admițând că în imediata vecinătate a conductorului filiform intensitatea câmpului magnetic se poate aproxima cu cea produsă de conductor, curba C_k poate fi asimilată unei linii de câmp magnetic, deci $\mathbf{H}||\mathbf{ds}_k$. Dacă se ține seama de relația de calcul vectorial,

$$(\mathbf{H}\times\mathbf{A})(\mathbf{ds}_k\times\mathbf{dl}_k) = (\mathbf{H}\,\mathbf{ds}_k)(\mathbf{A}\,\mathbf{dl}_k) - (\mathbf{H}\,\mathbf{dl}_k)(\mathbf{A}\,\mathbf{ds}_k) \tag{5.210}$$

şi de faptul că $\mathbf{ds}_k \perp \mathbf{dl}_k$ şi deci $\mathbf{H}\perp\mathbf{dl}_k$ ($\mathbf{H}\,\mathbf{dl}_k = 0$), deoarece $\mathbf{H}||\mathbf{ds}_k$, rezultă:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oiint_{\Sigma_k}(\mathbf{H}\,\mathbf{ds}_k)(\mathbf{A}\,\mathbf{dl}_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}\mathbf{H}\,\mathbf{ds}_k\oint_{\Gamma_k}\mathbf{A}\,\mathbf{dl}_k\,. \tag{5.211}$$

Aplicând legea circuitului magnetic în lungul curbei C_k,

$$i_k = \oint_{C_k}\mathbf{H}\,\mathbf{ds}_k \tag{5.212}$$

şi ținând seama de relația

$$\oint_{\Gamma_k}\mathbf{A}\,\mathbf{dl}_k = \iint_{S_{\Gamma_k}}(\mathrm{rot}\mathbf{A})\mathbf{n}_k\,dA_k = \iint_{S_{\Gamma_k}}\mathbf{B}\,\mathbf{n}_k dA_k = \Phi_k\,, \tag{5.213}$$

rezultă:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k\,\Phi_k\,. \tag{5.214}$$

Utilizând relațiile lui Maxwell pentru inductivități (4.267),

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^{n}\Phi_{kj} = \sum_{j=1}^{n}L_{kj}i_j\,, \tag{5.215}$$

se obține energia magnetică în funcție de inductivități:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{kj}i_k i_j\,. \tag{5.216}$$

Dacă se utilizează relațiile lui Maxwell pentru inductivități reciproce (4.268),

$$i_k = \sum_{j=1}^{n}\Gamma_{kj}\Phi_j\,, \tag{5.217}$$

expresia energiei magnetice (5.214) devine:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{kj}\Phi_k\Phi_j\,. \tag{5.218}$$

Pentru n = 1 se obțin expresiile energiei magnetice ale unei bobine:

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \Phi i = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}. \tag{5.219}$$

Pentru n = 2 se obține energia magnetică totală a sistemului format din două bobine cuplate magnetic:

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + M i_1 i_2. \tag{5.220}$$

Ultimul termen din relația (5.220) se poate scrie şi sub formele următoare:

$$M i_1 i_2 = L_{12} i_1 i_2 = \Phi_{12} i_1 = L_{21} i_1 i_2 = \Phi_{21} i_2 \tag{5.221}$$

şi reprezintă energia magnetică de interacțiune dintre circuitul parcurs de curentul i_1 şi câmpul magnetic produs de circuitul parcurs de curentul i_2, sau energia magnetică de interacțiune dintre circuitul parcurs de curentul i_2 şi câmpul magnetic produs de circuitul parcurs de curentul i_1. În general, energia magnetică de interacțiune dintre un circuit electric parcurs de curentul electric i şi înlănțuit de fluxul magnetic Φ, produs de un câmp magnetic exterior este:

$$W_m = i \Phi. \tag{5.222}$$

Inductivitatea interioară. Inductivitățile proprii şi mutuale definite cu ajutorul fluxului magnetic (v. par. 4.8) se referă exclusiv la domenii din exteriorul conductoarelor filiforme. În interiorul conductoarelor, aceste definiții nu pot fi utilizate deoarece nu este posibilă alegerea univocă a suprafeței prin care se calculează fluxul magnetic. Inductivitatea interioară care corespunde câmpului magnetic din interiorul conductoarelor se defineşte cu ajutorul energiei magnetice. Astfel, energia magnetică a unui conductor ocupând volumul v_i şi parcurs de curentul i este (5.219):

$$W_{mi} = \frac{1}{2} L_i i^2. \tag{5.223}$$

Pe de altă parte, energia magnetică localizată în conductor are expresia (5.205),

$$W_{mi} = \frac{1}{2} \iiint_{v_i} \mathbf{H}\,\mathbf{B}\, dv . \tag{5.224}$$

Identificând relațiile (5.223) şi (5.224) se obține inductivitatea interioară L_i a conductorului:

$$L_i = \frac{2}{i^2} W_{mi} = \frac{1}{i^2} \iiint_{v_i} \mathbf{H}\,\mathbf{B}\,dv\ . \tag{5.225}$$

5.3.5. Teorema acțiunilor ponderomotoare

În orice sistem fizic format din corpuri în interacțiune cu câmpul electromagnetic, se dezvoltă întotdeauna forțe. Aceste forțe se caracterizează prin aceea că depind de mărimile de stare electrică şi magnetică a corpurilor şi se anulează odată cu dispariția câmpului.

În acord cu concepția transmiterii din aproape în aproape a acțiunilor câmpului, forța exercitată de câmp asupra corpurilor poate fi localizată în elemente de volum oricât de mici. Astfel se poate introduce noțiunea de *densitate de volum a forței*:

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta v} = \frac{d\mathbf{F}}{dv}, \tag{5.226}$$

unde $\Delta\mathbf{F}$ este forța elementară care se exercită asupra elementului de volum Δv.

Se consideră un mediu în mişcare cu viteza $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$. Mediul este liniar şi izotrop, lipsit de polarizare electrică permanentă şi de magnetizare permanentă. De asemenea, se consideră că permitivitatea electrică ε şi permeabilitatea magnetică μ depind de densitatea de masă τ care la rândul său este o funcție de punct şi de timp:

$$\varepsilon = \varepsilon(\tau) = \varepsilon[\tau(\mathbf{r},t)];\ \mu = \mu(\tau) = \mu[\tau(\mathbf{r},t)]. \tag{5.227}$$

În acord cu primul principiu al termodinamicii, energia transferată sistemului din exterior W_Σ, în unitatea de timp prin suprafața Σ are expresia:

$$\frac{dW_\Sigma}{dt} = P_J + P_{mec} + \frac{dW_{em}}{dt}, \tag{5.228}$$

unde: P_J este puterea transformată în conductoarele situate în v_Σ; P_{mec} este puterea mecanică datorată lucrului mecanic al forțelor de natură electromagnetică, iar W_{em} este energia electromagnetică localizată în domeniul v_Σ.

Presupunând sistemul format din corpuri şi câmpul electromagnetic extins în întreg spațiul v_∞, intensitatea câmpului electric şi intensitatea câmpului magnetic scad suficient de repede cu distanța, astfel încât vectorul Poynting se anulează la infinit şi nu există transport de putere prin frontiera Σ_∞ de la infinit,

$$P_{\Sigma\infty} = \frac{dW_{\Sigma_\infty}}{dt} = \oiint_{\Sigma_\infty} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})\mathbf{n}_i\, dA = 0\,. \tag{5.229}$$

Prin urmare, ecuația de bilanț energetic (5.228) devine:

$$-\frac{dW_{em}}{dt} = P_J + P_{mec}, \tag{5.230}$$

unde puterea mecanică datorată lucrului mecanic al forțelor de natură electromagnetică se scrie în funcție de densitatea de volum a forței **f**:

$$P_m = \iiint_{v_\infty} \mathbf{f}\,\mathbf{v}\,dv. \tag{5.231}$$

Ținând seama de expresia densității de volum a energiei electromagnetice (5.178) şi de legea transformării energiei în conductoare (5.31), relația (5.230) devine:

$$-\iiint_{v_\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{ED}}{2} + \frac{\mathbf{HB}}{2}\right) dv = \iiint_{v_\infty} \mathbf{E}\,\mathbf{J}\,dv + \iiint_{v_\infty} \mathbf{f}\,\mathbf{v}\,dv. \tag{5.232}$$

Utilizând condițiile de mediu formulate mai sus şi ecuațiile câmpului, din relația (5.232) se obține expresia densității de volum a forței electromagnetice care conține două componente [7]:

$$\mathbf{f}_{em} = \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_m, \tag{5.233}$$

unde:

$$\mathbf{f}_e = \rho_v \mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2 \operatorname{grad}\varepsilon + \frac{1}{2}\operatorname{grad}\left(E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau}\tau\right) + \mathbf{D} \times \frac{d_f \mathbf{B}}{dt} \tag{5.234}$$

este densitatea de volum a forței electrice, iar

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{2}H^2 \operatorname{grad}\mu + \frac{1}{2}\operatorname{grad}\left(H^2 \frac{d\mu}{d\tau}\tau\right) + \frac{d_f \mathbf{D}}{dt} \times \mathbf{B} \tag{5.235}$$

este densitatea de volum a forței magnetice.

În relația (5.234), primul termen, $\rho_v \mathbf{E}$, reprezintă densitatea de volum a forței exercitate de câmpul electric asupra corpurilor încărcate electric; al doilea termen, $-\frac{1}{2}E^2 \operatorname{grad}\varepsilon$, este densitatea de volum a forței exercitate de câmpul electric asupra corpurilor cu o distribuție neomogenă a permitivității electrice ε; al treilea termen, $\frac{1}{2}\operatorname{grad}\left(E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau}\tau\right)$, reprezintă densitatea de volum a forței de electrostricțiune; prin electrostricțiune se înțelege fenomenul de deformare a unui dielectric la introducerea sa într-un câmp electric exterior.

În relația (5.235), primul termen, $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, reprezintă densitatea de volum a forței exercitate de câmpul magnetic asupra conductoarelor în stare electrocinetică; al doilea termen, $-\frac{1}{2}H^2 \operatorname{grad}\mu$, este densitatea de volum a forței exercitate de câmpul magnetic asupra corpurilor cu o distribuție neomogenă a permeabilității magnetice μ; al treilea termen, $\frac{1}{2}\operatorname{grad}\left(H^2 \frac{d\mu}{d\tau}\tau\right)$, reprezintă densitatea de volum a

forței de magnetostricțiune; prin magnetostricțiune se înțelege fenomenul de deformare a unui corp la introducerea sa într-un câmp magnetic exterior.
Ultimii doi termeni din relațiile (5.234) şi (5.235) au valori nenule chiar şi în vid, astfel încât nu reprezintă o acțiune a câmpului asupra corpurilor ci asupra vidului, ceea ce este lipsit de sens, câmpul electromagnetic neputând exercita nici un fel de acțiuni asupra vidului. Suma ultimilor termeni din relațiile (5.234) şi (5.235) se poate scrie sub forma:

$$\mathbf{D}\times\frac{d_f\mathbf{B}}{dt}+\frac{d_f\mathbf{D}}{dt}+\mathbf{B}=\frac{d_s}{dt}\left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right)=\frac{d_s\mathbf{g}}{dt} \tag{5.236}$$

şi corespunde variației în timp a unei forme speciale de impuls asociat câmpului electromagnetic. Acesta este impulsul electromagnetic a cărui densitate de volum, conform relației (5.236), este:

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}. \tag{5.237}$$

Calculul forțelor electromagnetice prezintă interes numai în cazul câmpurilor staționare şi cvasistaționare, când variația impulsului electromagnetic este neglijabilă, astfel încât ultimii termeni din relațiile (5.234) şi (5.235) pot fi neglijați.

5.3.6. Teoremele forțelor generalizate în câmp electrostatic

Forțele de interacțiune dintre sarcinile punctiforme pot fi calculate cu ajutorul teoremei lui Coulomb. În cazul corpurilor masive încărcate cu sarcini electrice, utilizarea teoremei lui Coulomb devine laborioasă, deoarece corpurile trebuie împărțite în părți elementare, care ar putea fi considerate punctiforme şi forța rezultantă se determină ca suma forțelor de interacțiune ale sarcinilor elementare astfel constituite.

Calculul forțelor care se exercită în câmp electric asupra conductoarelor se poate face plecând de la expresia densității de volum a forței $\mathbf{f}_e$ (5.234) şi integrând-o pe volumul corpului. Această metodă prezintă dezavantajul unui calcul laborios, datorită faptului că este necesar să se determine expresia intensității câmpului electric $\mathbf{E}$ în orice punct din interiorul sau de pe suprafața corpului.

În regim electrostatic, calculul acestor forțe se poate face cunoscând variația energiei sistemului de corpuri încărcate.

Se consideră un sistem de n corpuri conductoare încărcate cu sarcinile q_k şi având potențialele V_k, situate într-un mediu dielectric liniar, izotrop, fără polarizație permanentă, infinit extins. Configurația sistemului de conductoare este complet caracterizată de m parametri independenți, x_1, x_2, …, x_m, numiți *coordonate generalizate* ale sistemului. Astfel de coordonate pot fi considerate distanțele dintre corpuri, unghiurile de rotație a corpurilor în jurul unor axe, ariile suprafețelor sau volumele corpurilor, etc. Forțele electrostatice care tind să modifice aceste coordonate se numesc *forțe generalizate* şi se notează cu X_k, k = 1, 2,…, m. Fiecărei coordonate generalizate îi corespunde forța generalizată proprie, care tinde să modifice această coordonată în sensul creşterii acesteia. Între coordonatele generalizate şi forţele generalizate există următoarea corespondenţă: deplasare – forţă, unghi de rotaţie în jurul unei axe – cuplu, arie – tensiune superficială, volum – presiune.

Numărul de coordonate generalizate, necesare pentru determinarea poziţiei sistemului, este egal cu numărul de grade de libertate ale sistemului de corpuri. Astfel, în cazul unui corp cu o axă fixă este suficient să se cunoască numai unghiul de rotaţie a corpului în jurul acestei axe.

Considerăm că toate corpurile încărcate, în afară de corpul k, sunt fixe şi numai corpul k se poate deplasa, astfel încât variază una dintre coordonatele sale x_k. Această variaţie a coordonatei generalizate x_k se produce sub acţiunea forţei X_k, care se datorează interacţiunii sarcinii corpului k cu toate sarcinile sistemului. Deplasarea sarcinii q_k împreună cu corpul k, adică modificarea coordonatei generalizate x_k, trebuie să se producă suficient de lent pentru a se menţine starea de echilibru electrostatic. Dacă dx_k este o variaţie elementară a coordonatei generalizate x_k, atunci lucrul mecanic elementar efectuat de forţa electrostatică X_k care modifică poziţia corpului k este:

$$dL_i = X_k dx_k \tag{5.238}$$

a. Teorema forţelor generalizate la sarcini constante. Dacă sistemul este izolat, sarcinile conductoarelor rămân constante, q_k = const. şi deci nu trebuie efectuat lucru mecanic din exterior ($dL_e = 0$) pentru aducerea altor sarcini, adică nu există aflux de energie către sistem. În acest caz, principiul conservării energiei (5.168) se exprimă prin relaţia:

$$0 = \left(dW_e\right)_{q_k=\text{const.}} + dL_i\,, \tag{5.239}$$

sau

$$X_k dx_k = -\left(dW_e\right)_{q_k=\text{const.}} \tag{5.240}$$

unde indicele q_k = const. arată că sarcinile electrice nu se modifică.
Dacă dx_k este deplasarea produsă sub acţiunea forţei X_k, înseamnă că lucrul mecanic efectuat de această forţă este pozitiv, $dL_i = X_k dx_k > 0$. În acest caz, din relaţia (5.240) rezultă că $\left(dW_e\right)_{q_k=\text{const.}} < 0$, adică energia câmpului electrostatic scade. Într-adevăr, când nu există aport de energie din exterior, lucrul mecanic elementar dL_i se poate efectua numai pe seama rezervelor interne de energie ale sistemului, în cazul de faţă pe seama energiei câmpului electrostatic.
Din relaţia (5.240) se obţine:

$$X_k = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_k}\right)_{q_k=\text{const.}}. \tag{5.241}$$

Relaţia (5.241) constituie *prima teoremă a forţelor generalizate în câmp electrostatic*: *în cazul sarcinilor electrice constante ale conductoarelor, forţa generalizată* X_k*, care acţionează în sensul creşterii coordonatei generalizate* x_k*,* *este egală şi de semn contrar cu derivata parțială a energiei electrostatice* W_e *în raport cu coordonata generalizată* x_k.

În conformitate cu prima teoremă a forțelor generalizate în câmp electrostatic, forțele generalizate tind să deplaseze sau să rotească conductoarele încât la sarcini electrice constante energia electrostatică descreşte.

b. Teorema forțelor generalizate la potențiale constante. Considerăm acelaşi sistem de corpuri, dar vom presupune că în cursul deplasării sarcinile electrice ale corpurilor se pot modifica prin aducere de la infinit a altor sarcini electrice, iar potențialele corpurilor rămân constante (de exemplu, cazul unor corpuri conductoare conectate la surse de tensiune electrică constantă). Sarcini suplimentare pot fi transmise sistemului numai de sursele exterioare care, pentru aceasta, trebuie să efectueze un lucru mecanic $dL_e \neq 0$. Acest lucru se realizează transportând cu ajutorul unor corpuri de probă sarcinile elementare dq_k de la infinit pe suprafețele conductoarelor. Pentru a calcula lucrul mecanic necesar transportului corpurilor de probă de la infinit pe corpurile conductoare, se admite că deplasarea în câmp a corpurilor de probă se efectuează foarte lent, astfel încât fiecare din stările succesive ale sistemului poate fi considerată o stare electrostatică. Lucrul mecanic elementar dL_e efectuat din exterior de forța **dF** asupra corpului de probă pentru a transmite sarcina elementară dq_k este:

$$dL_e = \sum_{k=1}^{n} \int_{\infty}^{P} \mathbf{dF}\,\mathbf{ds}_k \,. \tag{5.242}$$

Asupra corpurilor de probă acționează pe de o parte forțele exterioare **dF** necesare deplasării sarcinilor de la infinit pe corpurile considerate, iar pe de altă parte forțele coulombiene $\mathbf{dF}_c = dq_k\mathbf{E}$, unde **E** este intensitatea câmpului electrostatic. Pentru a obține o deplasare lentă, diferența dintre aceste forțe trebuie să fie mică, adică forța **dF** este egală şi de semn opus cu forța $\mathbf{dF}_c$, $\mathbf{dF} = -\,\mathbf{dF}_c$. Prin urmare, relația (5.242) devine:

$$dL_e = -\sum_{k=1}^{n} \int_{\infty}^{P_k} dq_k\, \mathbf{E}\,\mathbf{ds}_k = -\sum_{k=1}^{n} dq_k \int_{\infty}^{P} \mathbf{E}\,\mathbf{ds}_k = \sum_{k=1}^{n} V_k\, dq_k \,, \tag{5.243}$$

V_k fiind potențialul electrostatic al conductorului k.

În acest caz, creşterea energiei câmpului electrostatic al sistemului de corpuri încărcate va fi:

$$\left(dW_e\right)_{V_k=\text{const.}} = d\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} V_k\, q_k\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} V_k dq_k = \frac{1}{2} dL_e \,, \tag{5.244}$$

adică este egală cu jumătate din lucrul mecanic elementar (5.243) efectuat de sursele exterioare. În conformitate cu principiul conservării energiei,

$$dL_e = \left(dW_e\right)_{V_k=\text{const.}} + dL_i \,, \tag{5.245}$$

cealaltă jumătate din lucrul mecanic efectuat de sursele exterioare este consumată pentru efectuarea lucrului mecanic dL_i:

$$\sum_{k=1}^{k=n} V_k \, dq_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} V_k \, dq_k + X_k dx_k , \tag{5.246}$$

sau:

$$X_k dx_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} V_k \, dq_k = (dW_e)_{V_k = const.} \tag{5.247}$$

Dacă în sistem se produce o deplasare dx_k sub acțiunea forței X_k, lucrul mecanic efectuat de această forță este pozitiv, $dL_i = X_k dx_k > 0$. Din relația (5.247) rezultă că $(dW_e)_{V_k = const.} > 0$, adică energia câmpului electrostatic creşte.

Din relația (5.247) rezultă:

$$X_k = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right)_{V_k = const.} . \tag{5.248}$$

Relația (5.248) constituie *a doua teoremă a forțelor generalizate în câmp electrostatic*: *la potențiale constante ale conductoarelor, forța generalizată* X_k, *care acționează în sensul creşterii coordonatei generalizate* x_k, *este egală cu derivata parțială a energiei electrostatice* W_e *în raport cu coordonata generalizată* x_k.

La potențiale constante ale conductoarelor, forțele generalizate tind să deplaseze sau să rotească conductoarele încât energia electrostatică creşte.

Într-o stare dată a sistemului, energia sa electrostatică şi deci forțele care se exercită între conductoare sunt unice, indiferent care este evoluția pe care o urmează sistemul plecând din această stare, adică astfel încât să fie menținute constante sarcinile sau potențialele conductoarelor. De aceea, aplicarea oricăreia dintre cele două teoreme, (5.241) sau (5.248), trebuie să conducă obligatoriu la acelaşi rezultat, adică:

$$X_k = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right)_{q_k = const.} = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right)_{V_k = const.} . \tag{5.249}$$

5.3.7. Teoremele forțelor generalizate în câmp magnetic

Forțele care se exercită între conductoare parcurse de curenți de conducție se numesc forțe electrodinamice. Forțele care se exercită asupra conductoarelor parcurse de curenți de conducție sau asupra unor corpuri situate în câmp magnetic se numesc forțe electromagnetice. Forțele electromagnetice se pot calcula cu ajutorul densității de volum a forței magnetice $\mathbf{f}_m$ (5.235). Această metodă implică unele dificultăți, în special în privința determinării mărimilor de stare ale câmpului în orice punct al spațiului.

Ca şi în cazul câmpului electrostatic, este posibilă determinarea forţelor care se exercită asupra corpurilor aflate în câmp magnetic, dacă se cunoaşte energia înmagazinată în câmpul magnetic. În acest sens, se consideră un sistem format din n bobine, cuplate magnetic, parcurse de curenţii de conducţie $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Bobinele sunt alimentate de la n surse având tensiunile la borne u_{bk}, $k = 1, 2, \ldots, n$. Poziţia reciprocă a bobinelor este complet caracterizată de m coordonate generalizate, x_1, $x_2, \ldots, x_m$. Considerăm că toate circuitele, în afară de circuitul k, sunt fixe şi numai circuitul k se poate deplasa, astfel încât variază una dintre coordonatele sale x_k. Această variaţie a coordonatei generalizate x_k se produce sub acţiunea forţei X_k. Deplasarea circuitului k, adică modificarea coordonatei generalizate x_k, trebuie să se producă suficient de lent, astfel încât să nu apară fenomene de radiaţie a energiei electromagnetice. Dacă dx_k este o variaţie elementară a coordonatei generalizate x_k, atunci lucrul mecanic elementar efectuat de forţa magnetică X_k care modifică poziţia circuitului k este:

$$dL = X_k dx_k \tag{5.250}$$

Scriind pentru fiecare bobină ecuaţia de tensiuni (5.99),

$$u_{bk} = R_k\, i_k + \frac{d\Phi_k}{dt} \tag{5.251}$$

şi multiplicându-le cu $i_k dt$ şi apoi însumându-le, se obţine:

$$\sum_{k=1}^{n} u_{bk} i_k\, dt = \sum_{k=1}^{n} R_k\, i_k^2 dt + \sum_{k=1}^{n} i_k\, d\Phi_k\ . \tag{5.252}$$

Pe de altă parte, dacă se admite că bobina k este mobilă, ecuaţia bilanţului energetic al sistemului în intervalul de timp elementar dt este:

$$\sum_{k=1}^{n} u_{bk} i_k\, dt = \sum_{k=1}^{n} R_k\, i_k^2 dt + dL + dW_m, \tag{5.253}$$

unde: $dW_b = \sum_{k=1}^{n} u_{bk} i_k\, dt$ este suma energiilor elementare primite de bobine pe la borne; $dQ = \sum_{k=1}^{n} R_k\, i_k^2 dt$ este suma energiilor elementare transformate ireversibil în căldură în rezistenţele R_k ale bobinelor; dL este lucrul mecanic elementar efectuat de forţele magnetice generalizate X_k la o variaţie a coordonatei generalizate x_k, iar dW_m variaţia energiei magnetice a sistemului.

Comparând relaţiile (5.252) şi (5.253), rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k\, d\Phi_k = dL + dW_m\,. \tag{5.254}$$

a. Teorema forţelor generalizate la fluxuri magnetice constante. Dacă se menţin constante fluxurile magnetice, rezultă $d\Phi_k = 0$ şi relaţia (5.254) devine:

$$dL = X_k dx_k = -\left(dW_m\right)_{\Phi_k=\text{const.}}. \tag{5.255}$$

Dacă dx_k este variația coordonatei generalizate produsă sub acțiunea forței generalizate X_k, înseamnă că lucrul mecanic efectuat de această forță este pozitiv, $dL > 0$ şi din relația (5.255) rezultă $\left(dW_m\right)_{\Phi_k=\text{const.}} < 0$, adică energia magnetică a sistemului scade. În acest caz, energia furnizată de surse acoperă numai energia transformată ireversibil în căldură în rezistențele R_k ale bobinelor, iar lucrul mecanic se efectuează numai pe seama scăderii energiei magnetice a sistemului. Din relația (5.255) se obține componenta X_k a forței generalizate,

$$X_k = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x_k}\right)_{\Phi_k=\text{const.}}. \tag{5.256}$$

Rezultă că forțele generalizate tind să deplaseze sau să rotească conductoarele încât la fluxuri magnetice constante energia magnetică descreşte.

b. Teorema forțelor generalizate la curenți constanți. Dacă se presupune că intensitățile curenților sunt constante, i_k = const. şi ținând seama de expresia energiei magnetice (5.214), rezultă:

$$\left(dW_m\right)_{i_k=\text{const.}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k d\Phi_k . \tag{5.257}$$

Înlocuind (5.257) în relația (5.254) se obține:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k\, d\Phi_k = X_k dx_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k\, d\Phi_k , \tag{5.258}$$

sau

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k\, d\Phi_k = \left(dW_m\right)_{i_k=\text{const.}} = X_k dx_k . \tag{5.259}$$

Deoarece $dL > 0$ din relația (5.259) rezultă $\left(dW_m\right)_{i_k=\text{const.}} > 0$, adică energia magnetică a sistemului creşte. Conform relației (5.253), la curenți constanți, energia furnizată de surse se împarte în trei părți: o parte acoperă energia transformată ireversibil în căldură în rezistențele R_k ale bobinelor, a doua parte acoperă lucrul mecanic efectuat de forțele generalizate, iar ultima parte, egală cu a doua (5.259), contribuie la creşterea energiei magnetice a sistemului.

Din relația (5.259) se obține componenta X_k a forței generalizate:

$$X_k = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x_k}\right)_{i_k=\text{const.}}. \tag{5.260}$$

Rezultă că forțele generalizate tind să deplaseze sau să rotească conductoarele încât la curenți constanți energia magnetică creşte.

Pentru o configurație geometrică dată a sistemului de conductoare, forțele generalizate sunt aceleaşi indiferent în ce condiții se presupune că evoluează sistemul, la fluxuri magnetice sau intensități ale curenților constante,

$$-\left(\frac{\partial W_m}{\partial x_k}\right)_{\Phi_k=\text{const.}} = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x_k}\right)_{i_k=\text{const.}} . \qquad (5.261)$$

5.3.8. Teorema fundamentală a câmpurilor de vectori

Natura câmpurilor de vectori se studiază cu ajutorul a două mărimi globale, integrala de linie şi integrala de suprafață ale vectorului câmp, cărora le corespund mărimile locale (diferențiale) rotorul şi divergența vectorului câmp.

Teorema fundamentală a câmpurilor de vectori se enunță astfel: *vectorul câmp* **F**(**r**) *al unui câmp de vectori este unic determinat în fiecare punct din domeniul* v_Σ *mărginit de suprafața închisă* Σ, *dacă se cunosc în fiecare punct* $P \in v_\Sigma$:

- *rotorul vectorului* **F**, rot**F**;
- *divergența vectorului* **F**, div**F**

şi în fiecare punct $P \in \Sigma$, *fie*

- *componentele normale ale lui* **F**,

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{n}(\mathbf{F}\mathbf{n}), \qquad (5.262)$$

fie

- *componentele tangențiale ale lui* **F**,

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{n}). \qquad (5.263)$$

5.3.9. Sistemul complet şi independent al ecuațiilor câmpului electromagnetic

Se va examina cazul cel mai frecvent al mediilor neliniare, omogene şi izotrope, lipsite de polarizație permanentă şi magnetizație permanentă.

Din punctul de vedere al determinării unui câmp de vectori prin divergența şi rotorul lui, pentru perechea de mărimi electrice **D**, **E** între care există ecuația de legătură dintre **D**, **E** şi $\mathbf{P}_t$ (5.1)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}_t, \qquad (5.264)$$

respectiv ecuația de material (5.2)

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t(\mathbf{E}), \qquad (5.265)$$

intervin ecuațiile care exprimă divergența inducției electrice (5.19),

$$\text{div}\,\mathbf{D} = \rho_v \qquad (5.266)$$

şi rotorul intensităţii câmpului electric (5.68)

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{5.267}$$

Similar, pentru perechea de mărimi magnetice **B**, **H** între care există ecuaţia de legătură dintre **B**, **H** şi $\mathbf{M}_t$ (5.36)

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \tag{5.268}$$

respectiv ecuaţia de material (5.38)

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{M}_t(\mathbf{H}), \tag{5.269}$$

intervin ecuaţiile divergenţei inducţiei magnetice (5.50),

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \tag{5.270}$$

şi rotorului intensităţii câmpului magnetic (5.153)

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{5.271}$$

Deoarece ecuaţia (5.271) conţine vectorul densităţii curentului electric de conducţie **J**, se adaugă legea de material (5.23)

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}). \tag{5.272}$$

Prin urmare, în acord cu teorema fundamentală a câmpurilor de vectori, sistemul complet al ecuaţiilor câmpului electromagnetic în medii neliniare, omogene şi izotrope este constituit din ecuaţiile (5.264 - 5.272) ale legilor câmpului electromagnetic.

Din punctul de vedere al independenţei ecuaţiilor sistemului (5.264 - 5.272), până la o constantă aditivă independentă de timp, din ecuaţia (5.267) rezultă ecuaţia (5.270) şi din aceasta din urmă rezultă complet ecuaţia (5.267). În consecinţă, sistemul complet şi independent al ecuaţiilor câmpului electromagnetic nestaţionar în medii neliniare, omogene şi izotrope este constituit din următoarele opt ecuaţii:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P};\quad \mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t(\mathbf{E});\quad \mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho_v;\quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \tag{5.273}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M});\quad \mathbf{M}_t = \mathbf{M}_t(\mathbf{H});\quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};\quad \mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}). \tag{5.274}$$

Sistemul de ecuaţii (5.273, 5.274) conţine 22 ecuaţii scalare cu 22 necunoscute, din care câte trei pentru fiecare dintre vectorii **D**, **E**, $\mathbf{P_t}$, **B**, **H**, $\mathbf{M_t}$, **J** şi una pentru scalarul ρ_v.

În medii liniare, omogene şi izotrope, presupunând cunoscute funcţiile de punct ale permitivităţii $\varepsilon(\mathbf{r})$, permeabilităţii $\mu(\mathbf{r})$ şi conductivităţii $\sigma(\mathbf{r})$, ecuaţiile dependenţelor dintre inducţii, intensităţi şi polarizaţii nu sunt independente de ecuaţiile de material ale polarizaţiilor; de asemenea nici ecuaţia rotorului lui **H** nu este independentă de ecuaţia de material a lui **J**. În consecinţă, sistemul complet şi independent al ecuaţiilor câmpului electromagnetic nestaţionar în medii liniare, omogene şi izotrope este constituit din următoarele şase ecuaţii ale legilor:

- dependenţei dintre inducţie şi intensitate în câmp electric,

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}; \tag{5.275}$$

- fluxului electric,

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho_v; \tag{5.276}$$

- inducţiei electromagnetice,

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$

- dependenţei dintre inducţie şi intensitate în câmp magnetic,

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}; \tag{5.277}$$

- fluxului magnetic,

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0; \tag{5.278}$$

- circuitului magnetic,

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{5.279}$$

Din punctul de vedere al independenţei ecuaţiilor (5.275 – 5.279), sistemul complet şi independent al ecuaţiilor câmpului electromagnetic în medii liniare, omogene şi izotrope este constituit din cinci ecuaţii:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E};\ \ \mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho_v;\ \ \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \tag{5.280}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H};\ \ \mathrm{rot}\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{5.281}$$

Sistemul de ecuaţii (5.280, 5.281) conţine 13 ecuaţii scalare cu 13 necunoscute, din care câte trei pentru fiecare dintre vectorii **D**, **E**, **B** şi **H** şi una pentru scalarul ρ_v.

Intensităţile şi inducţiile electrică şi magnetică, precum şi densitatea curentului electric de conducţie satisfac ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi neomogene în care funcţiile din membrul doi sunt densitatea de sarcină electrică

ρ_v, respectiv densitatea curentului electric de conducție **J**; ele se numesc *surse ale câmpului electromagnetic.*

Pentru medii imobile şi cu valori constante pe subdomenii ale mărimilor de material, sistemul de ecuații (5.275 – 5.279), respectiv sistemul independent de ecuații (5.280, 5.281) alcătuiesc *ecuațiile lui Maxwell.*

5.3.10. Clasificarea regimurilor câmpului electromagnetic

a. În *regim nestaționar* (general variabil), determinarea vectorilor **E** şi **D** distinct de vectorii **H** şi **B** nu este posibilă datorită celor trei dependențe dintre mărimile electrice, pe de o parte şi mărimile magnetice pe de altă parte, care intervin în ecuațiile care se referă la rotorii lui **E** şi **H** şi anume:

- dependența dintre rot **H** şi $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$;
- dependența dintre rot **E** şi $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$;
- dependența dintre rot **H** şi **J**.

În acest regim mărimile **E**, **D**, **H** şi **B** satisfac o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi neliniară de tip hiperbolic; fenomenul pe care-l descrie ecuația este de propagare. Regimul nestaționar al câmpului electromagnetic intervine în studiul radiației şi propagării undelor electromagnetice.

b. În *regim cvasistaționar anelectric*, dependența dintre rot **H** şi $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ este neglijabilă; în acest regim, legea circuitului magnetic are forma teoremei lui Ampère:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{5.282}$$

şi între perechile de mărimi electrice **D**, **E** şi magnetice **B**, **H** intervin numai două dependențe. În medii imobile, cu excepția dielectricilor condensatoarelor electrice, densitatea curentului de deplasare $\mathbf{J}_D = \partial \mathbf{D}/\partial t$ este neglijabilă în raport cu densitatea curentului electric de conducție $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. În acest regim mărimile **B**, **H**, **E** şi **J** satisfac o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi neliniară de tip parabolic; fenomenul pe care-l descrie ecuația este de difuzie. Regimul cvasistaționar anelectric al câmpului electromagnetic interesează în principal în studiul curenților variabili în conductoare masive.

c. În *regim cvasistaționar amagnetic,* dependența dintre rot**E** şi $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ este neglijabilă; în acest regim legea inducției electromagnetice are forma teoremei potențialului staționar,

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0 \tag{5.283}$$

şi între perechea de mărimi electrice **E**, **D** şi magnetice **H**, **B** intervin numai două dependențe.

Acest regim interesează în studiul fenomenelor din dielectricii cu pierderi.

d. În *regim staționar*, derivatele în raport cu timpul ale inducțiilor electrică **D** şi magnetică **B** sunt nule,

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0\,;\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0\,. \tag{5.284}$$

Între perechea de mărimi electrice **E**, **D** şi magnetice **H**, **B** intervine numai dependența dintre rot**H** şi **J**. Mărimile de stare ale câmpului electromagnetic satisfac o ecuație cu derivate parțiale, în general neliniară, de tip eliptic şi fenomenul pe care îl descrie este de difuzie staționară. Dacă sursele câmpului magnetic sunt exclusiv curenții electrici de conducție, mărimile magnetice se determină independent de cele electrice. Regimul staționar electric face obiectul *electrocineticii* (curentului continuu), iar regimul staționar magnetic al *câmpului magnetic staționar*.

e. În *regim static*, toate dependențele dintre mărimile electrice şi cele magnetice sunt nule,

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0\,,\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0\,;\ \mathbf{J} = 0. \tag{5.285}$$

Pentru mărimile electrice, regimul se numeşte *electrostatic* şi face obiectul *electrostaticii*; pentru mărimile magnetice, regimul se numeşte *magnetostatic* şi face obiectul *magnetostaticii*. În aceste regimuri, mărimile electrice se determină independent de cele magnetice. Intensitățile şi inducțiile câmpurilor electrostatic şi magnetostatic satisfac separat ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi de tip eliptic, în general neliniare.

5.3.11. Teorema de unicitate a câmpului electromagnetic nestaționar

Se consideră un domeniu v_Σ mărginit de suprafața închisă Σ în interiorul căruia mediul liniar, omogen şi izotrop are permitivitatea ε(P), permeabilitatea μ(P) şi conductivitatea σ(P) funcții de punct care pot prezenta discontinuități pe suprafețe, linii sau puncte. Teorema de unicitate a soluțiilor ecuațiilor câmpului electromagnetic nestaționar în medii imobile se enunță astfel: *intensitățile câmpurilor electric* **E**(P,t) *şi magnetic* **H**(P,t) *într-un punct* $P \in v_\Sigma$ *la momentul* t*, soluții ale ecuațiilor câmpului electromagnetic în medii imobile* (5.264 - 5.272), *sunt unic determinate de valorile inițiale* **E**(P,0) *şi* **H**(P,0) *şi de componentele tangențiale fie ale câmpului electric* $\mathbf{E_t}(P_\Sigma,t)$, *fie ale câmpului magnetic* $\mathbf{H}_t(P_\Sigma, t)$ *pe suprafața de frontieră* Σ.

Pentru demonstrarea teoremei vom aplica principiul reducerii la absurd. Fie **E**(P, t), **E**'(P, t) şi **H**(P, t), **H**'(P, t) două soluții diferite la momentul t, dar identice la momentul t = 0,

$$\mathbf{E}(P, 0) = \mathbf{E}'(P, 0);\ \mathbf{H}(P, 0) = \mathbf{H}'(P, 0) \tag{5.286}$$

şi având aceleaşi componente tangenţiale pe suprafaţa Σ, fie ale câmpului electric

$$E_t(P_\Sigma,t)=E'_t(P_\Sigma,t), \tag{5.287}$$

fie ale câmpului magnetic

$$H_t(P_\Sigma,t)=H'_t(P_\Sigma,t). \tag{5.288}$$

Notând

$$\mathbf{E}_d(P,t)=\mathbf{E}(P,t)-\mathbf{E}'(P,t);\;\; \mathbf{H}_d(P,t)=\mathbf{H}(P,t)-\mathbf{H}'(P,t), \tag{5.289}$$

ecuaţia (5.167) scrisă pentru $\mathbf{E}_d$ şi $\mathbf{H}_d$ are forma:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(\mathbf{E}_d\times\mathbf{H}_d)\mathbf{n}_i\,dA=\iiint_{v_\Sigma}\sigma E_d^2\,dv+\frac{d}{dt}\iiint_{v_\Sigma}\left(\frac{\varepsilon E_d^2}{2}+\frac{\mu H_d^2}{2}\right)dv, \tag{5.290}$$

unde $\mathbf{n}_i$ este versorul normalei interioare pe Σ.
Integrandul primului membru se anulează fie datorită anulării lui $E_{dt}(P_\Sigma,t)$ în acord cu relaţia (5.287),

$$\mathbf{E}_{dt}(P_\Sigma,t)=\mathbf{n}_i\times\mathbf{E}_d(P_\Sigma,t)=\mathbf{n}_i\times\left[\mathbf{E}(P_\Sigma,t)-\mathbf{E}'(P_\Sigma,t)\right], \tag{5.291}$$

fie datorită anulării lui $H_{dt}(P_\Sigma,t)$ în acord cu relaţia (5.288),

$$\mathbf{H}_{dt}(P_\Sigma,t)=\mathbf{H}_d(P_\Sigma,t)\times\mathbf{n}_i=\left[\mathbf{H}(P_\Sigma,t)-\mathbf{H}'(P_\Sigma,t)\right]\times\mathbf{n}_i. \tag{5.292}$$

Prin urmare, se poate scrie:

$$\iiint_{v_\Sigma}\sigma E_d^2\,dv=-\frac{d}{dt}\iiint_{v_\Sigma}\left(\frac{\varepsilon E_d^2}{2}+\frac{\mu H_d^2}{2}\right)dv. \tag{5.293}$$

Deoarece $\sigma E_d^2>0$, rezultă că derivata integralei din membrul doi al relaţiei (5.293) este negativă şi deci integrala este descrescătoare sau constantă. Valoarea integralei în momentul iniţial fiind nulă, conform condiţiilor iniţiale (5.286), rezultă că la un moment t > 0 nu poate fi decât negativă sau nulă. Dar, pe de altă parte, deoarece ε > 0 şi μ > 0, rezultă că în orice moment t > 0 integrala nu poate fi negativă şi deci nu poate fi decât nulă:

$$\iiint_{v_\Sigma}\left(\frac{\varepsilon E_d^2}{2}+\frac{\mu H_d^2}{2}\right)dv=0. \tag{5.294}$$

Din condiţia (5.294) se obţine $\mathbf{E}_d(P,t)=0$ şi $\mathbf{H}_d(P,t)=0$ pentru $t\geq 0$. Prin urmare, conform relaţiilor (5.289), $\mathbf{E}(P,t)=\mathbf{E}'(P,t)$, $\mathbf{H}(P,t)=\mathbf{H}'(P,t)$ şi deci soluţia este unică.