

## CÂMPUL MAGNETIC STAȚIONAR

### 4.1. STAREA DE MAGNETIZARE ȘI CÂMPUL MAGNETIC

Asupra corpurilor se pot exercita forțe și cupluri de natură diferită de a celor termomecanice sau electrice, numite forțe și cupluri magnetice. Experimental se constată că în lipsa unui tratament termomecanic și la stare electrostatică nulă, cristalele naturale de magnetită ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) au proprietatea că între ele și asupra corpurilor din fier, cobalt, nichel sau aliaje ale acestora, se exercită forțe și cupluri. În aceste condiții se spune că sistemul format de cristalele de magnetită este în *stare de magnetizare* și că în regiunea din spațiu există *câmp magnetic*.

Câmpul magnetic mai poate fi stabilit și de conductoare parcurse de curent de conducție, de corpurile încărcate cu sarcini electrice aflate în mișcare și de fluxul electric variabil în timp.

Câmpul magnetic produs de substanțele magnetizate se numește *câmp magnetostatic*. În acest regim mărimile de stare nu variază în timp și nu au loc transformări de energie.

Câmpul magnetic produs de curentul continuu se numește *câmp magnetic staționar* (mărimile de stare nu variază în timp dar au loc transformări de energie).

Dacă regimul este variabil în timp (mărimile de stare variază în timp), câmpului magnetic i se asociază inseparabil câmpul electric și împreună se condiționează reciproc, alcătuind *câmpul electromagnetic*. Câmpul magnetic este câmpul electromagnetic considerat din punctul de vedere al proprietăților lui magnetice. La fel ca în câmp electric experiența arată că în vid câmpul magnetic este practic la fel cu cel din aer.

Introducerea mărimii de stare care caracterizează câmpul magnetic în vid se poate face studiind acțiunile ponderomotoare pe care acesta le exercită asupra corpurilor încărcate cu sarcini electrice în mișcare, asupra corpurilor magnetizate, sau asupra conductoarelor parcurse de curent electric de conducție. Acțiunile ponderomotoare de natură magnetică în vid se studiază cu ajutorul inducției magnetice în vid.

## 4.2. INDUCȚIA MAGNETICĂ ÎN VID

Explorarea câmpului magnetic în vid se poate face fie cu ajutorul unui corp de probă încărcat cu sarcină electrică și aflat în mișcare, fie cu ajutorul unei spire filiforme parcursă de curent electric de conducție.

Se consideră un corp de probă încărcat cu sarcină electrică, utilizat pentru explorarea câmpului electric. Menținut imobil în câmp electric, asupra corpului de probă se exercită numai forța electrică. Dacă punându-l în mișcare, se constată că asupra lui se exercită o forță suplimentară care depinde de sarcina electrică care-l încarcă și de viteza cu care se deplasează, în regiunea din spațiu există câmp magnetic. Deci acest corp de probă pus în mișcare este adecvat explorării câmpului magnetic.

Se consideră un sistem de corpuri magnetizate și imobile al căror câmp magnetic invariabil în timp urmează a fi explorat cu ajutorul unui corp de probă încărcat cu sarcina electrică  $q$  și aflat în mișcare cu viteza  $v$ . În afară de condițiile pe care trebuie să le satisfacă corpul de probă pentru explorarea câmpului electric în vid, pentru studiul câmpului magnetic corpul de probă trebuie să nu fie magnetizat.

Se măsoară forța magnetică care acționează asupra corpului de probă de sarcină  $q$  și viteză  $v$ , suplimentară față de forța electrică. Se constată că forța magnetică  $F_{mq}$  depinde de sarcina  $q$  a corpului de probă, de viteza  $v$  și de poziția în câmp reperată prin raza vectorie  $r$ :

$$\mathbf{F}_{mq} = \mathbf{F}_{mq}(q, \mathbf{v}, \mathbf{r}). \quad (4.1)$$

Efectuând experiențe în diferite puncte din câmp cu corpuri de probă având sarcini electrice și viteze diferite, se constată că forța  $F_{mq}$

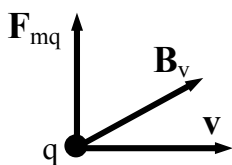


Fig. 4.1

acționează perpendicular pe viteza  $v$  și este egală cu produsul vectorial dintre viteza  $v$  și un vector axial depinzând numai de raza vectorie  $r$ , notat cu  $\mathbf{B}_v(\mathbf{r})$  (fig.4.1):

$$\mathbf{F}_{mq} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_v(\mathbf{r}). \quad (4.2)$$

Aducând într-un punct din câmp un corp de probă încărcat cu sarcina  $q$  și punându-l în mișcare cu o viteză  $v$  a cărei orientare corespunde unei forțe maxime  $F_{mq, \max}$ , modulul vectorului  $\mathbf{B}_v$  este egal cu raportul dintre modulul forței și produsul  $q \cdot v$ :

$$B_v = \frac{F_{mq, \max}}{q v}. \quad (4.3)$$

Mărimea vectorială de stare a câmpului magnetic în vid, care multiplicată vectorial cu produsul dintre sarcina electrică  $q$  și viteza  $v$  a corpului de probă, determină forța magnetică  $F_{mq}$  care se exercită asupra corpului de probă, se

numește *inducție magnetică în vid*  $\mathbf{B}_v$ . Relația (4.3) constituie relația de detectare a inducției magnetice în vid. Deoarece relația (4.2) s-a determinat experimental, inducția magnetică în vid este o *mărime primitivă*. Din punctul de vedere al unității de măsură, relația (4.3) constituie însă o relație de definiție și prin urmare inducția magnetică în vid este o mărime secundară. Unitatea de măsură a lui  $\mathbf{B}_v$  corespunde vectorului câmp în care asupra corpului de probă încărcat cu sarcina electrică egală cu un coulomb având viteza de un metru pe secundă în direcția în care forța este maximă, acționează o forță magnetică egală cu un newton. În sistemul de unități S.I., unitatea lui  $\mathbf{B}_v$  se numește *tesla* [T].

Forța (4.2) a fost stabilită de H. A. Lorentz în cadrul teoriei microscopice a câmpului electromagnetic, în care viteza  $\mathbf{v}$  este raportată la un sistem inerțial, diferit de cel utilizat în teoria macroscopică.

Forța magnetică elementară  $d\mathbf{F}_{mq}$  care acționează asupra sarcinii elementare  $dq$  aflată în mișcare cu viteza  $\mathbf{v}$  în câmpul magnetic de inducție  $\mathbf{B}_v$  se determină cu relația (4.2):

$$d\mathbf{F}_{mq} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B}_v. \quad (4.4)$$

Dacă sarcina este distribuită cu densitate de volum,  $dq = \rho_v dv$ , mărimea

$$\mathbf{f}_{mq} = \frac{d\mathbf{F}_{mq}}{dv} = \rho_v \mathbf{v} \times \mathbf{B}_v = \mathbf{J}_v \times \mathbf{B}_v \quad (4.5)$$

se numește *densitate de volum a forței magnetice*.

Dacă sarcina este distribuită cu densitate de suprafață,  $dq = \rho_A dA$ , mărimea

$$\mathbf{f}_{mqs} = \frac{d\mathbf{F}_{mq}}{dA} = \rho_A \mathbf{v} \times \mathbf{B}_v = \mathbf{J}_{v1} \times \mathbf{B}_v \quad (4.6)$$

se numește *densitate de suprafață a forței magnetice*.

Pentru sarcina distribuită cu densitate de linie, forța elementară  $d\mathbf{F}_{mq}$  care se exercită asupra elementului de linie  $d\mathbf{l}$  al firului C este:

$$d\mathbf{F}_{mq} = \rho_v \mathbf{v} dv \times \mathbf{B}_v = \mathbf{J}_v \times \mathbf{B}_v dv = \mathbf{J}_v \times \mathbf{B}_v (\mathbf{A} ds) = ds \times \mathbf{B}_v (\mathbf{J}_v \mathbf{A}) = ds \times \mathbf{B}_v i_v, \quad (4.7)$$

unde s-a ținut seama de faptul că  $\mathbf{J}_v$  și  $d\mathbf{s}$  sunt coliniari.

Prin urmare forța magnetică asupra firului are expresia:

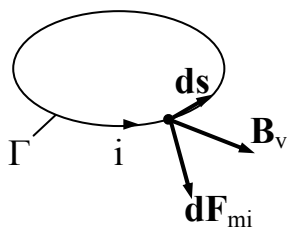


Fig. 4.2

$$\mathbf{F}_{mq} = i_v \int_C ds \times \mathbf{B}_v. \quad (4.8)$$

Din punctul de vedere al efectelor mecanice, forței Lorentz (4.8) îi corespunde forța magnetică, stabilită de Laplace, care acționează asupra conductorului filiform parcurs de curentul de conducție  $i$  (fig. 4.2), având conturul  $\Gamma$ , situat într-un câmp magnetic de inducție  $\mathbf{B}_v$ . Curentul  $i$  în conductor reprezintă o mișcare a sarcinilor electrice în interiorul conductorului.

Fie  $dq$  sarcina electrică elementară conținută în volumul elementului de lungime  $ds$  al conductorului. De asemenea, se consideră că în intervalul de timp  $dt$  sarcina elementară  $dq$  străbate drumul  $ds$ . Prin urmare, în intervalul de timp  $dt$  prin fiecare secțiune transversală a conductorului trece sarcina electrică elementară  $dq$ . Deci intensitatea curentului electric de conducție este:  $i = \frac{dq}{dt}$ . Rezultă,

$$vdq = \frac{ds}{dt} idt = i ds \text{ și înlocuind în relația (4.4) se obține forța magnetică elementară}$$

$d\mathbf{F}_{mi}$  care acționează asupra elementului de lungime  $ds$  al conductorului parcurs de curentul electric de conducție  $i$ :

$$d\mathbf{F}_{mi} = i ds \times \mathbf{B}_v. \quad (4.9)$$

Prin urmare, forța magnetică Laplace care acționează asupra conductorului filiform parcurs de curentul de conducție  $i$  (fig. 4.2), având conturul  $\Gamma$ , situat într-un câmp magnetic de inducție  $\mathbf{B}_v$  are expresia:

$$\mathbf{F}_{mi} = i \oint_{\Gamma} ds \times \mathbf{B}_v. \quad (4.10)$$

Analog, densității de volum a forței Lorentz (4.5) îi corespunde densitatea de volum a forței Laplace  $\mathbf{f}_m$  asupra unui conductor masiv parcurs de curentul  $i$  care se repartizează cu densitatea de curent  $\mathbf{J}$ . Într-adevăr, forța Laplace elementară care acționează asupra elementului de lungime  $ds$  al tubului elementar de curent  $di = \mathbf{J} d\mathbf{A}$  se calculează cu relația (4.9):

$$d\mathbf{F}_{mi} = di ds \times \mathbf{B}_v = \mathbf{J} d\mathbf{A} ds \times \mathbf{B}_v = \mathbf{J} dv \times \mathbf{B}_v. \quad (4.11)$$

Din relația (4.11) se obține densitatea de volum a forței Laplace:

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{J} \times \mathbf{B}_v. \quad (4.12)$$

Analog, densității de suprafață a forței Lorentz (4.6) îi corespunde densitatea de suprafață  $\mathbf{f}_{ms}$  a forței Laplace asupra pânzei curentului de conducție de densitate  $\mathbf{J}_l$ :

$$\mathbf{f}_{ms} = \mathbf{J}_l \times \mathbf{B}_v. \quad (4.13)$$

În principiu, introducerea mărimii primitive  $\mathbf{B}_v$  se poate face fie cu ajutorul curentului de convecție  $i_v$ , fie cu ajutorul curentului de conducție  $i$ . Din punct de vedere experimental se preferă curentul de conducție, deoarece este mai simplu de măsurat forța Laplace decât forța Lorentz.

Liniile de câmp ale vectorului  $\mathbf{B}_v(\mathbf{r})$  se numesc *linii de inducție magnetică* și au ecuația vectorială:

$$ds \times \mathbf{B}_v = 0. \quad (4.14)$$

Ansamblul liniilor inducției magnetice constituie *spectrul magnetic*. Liniile de câmp se trasează astfel încât prin fiecare unitate de arie transversală numărul lor să fie proporțional cu modulul vectorului  $\mathbf{B}_v$ . Câmpul magnetic este *omogen* sau *uniform*, dacă în fiecare punct vectorul  $\mathbf{B}_v$  are aceeași valoare și orientare, liniile inducției magnetice fiind paralele și echidistante (fig. 4.3).

Se consideră o curbă închisă  $\Gamma$ ; totalitatea liniilor de câmp prin punctele

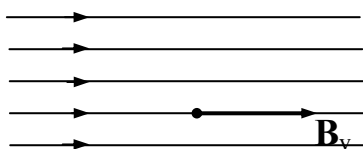


Fig. 4.3

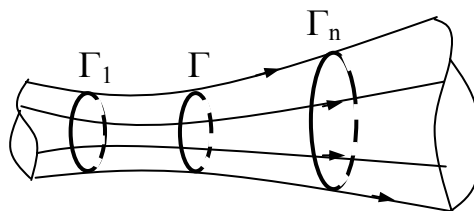


Fig. 4.4

curbei  $\Gamma$  alcătuiesc o suprafață  $S_\Gamma$  numită *tub de câmp* (fig. 4.4). La fel ca în câmp electric nici o linie de câmp magnetic nu înțeapă suprafața tubului, iar numărul liniilor de câmp prin orice secțiune transversală de contur  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  este același. Dacă aria secțiunii transversale este infinit mică, tubul se numește *elementar*.

### 4.3. INTENSITATEA CÂMPULUI MAGNETIC ÎN VID

Mărimea vectorială  $\mathbf{H}_v$  definită de raportul

$$\mathbf{H}_v = \frac{\mathbf{B}_v}{\mu_0} \quad (4.15)$$

se numește *intensitatea câmpului magnetic în vid*.

Mărimea  $\mu_0$  este o constantă universală, numită *permeabilitatea magnetică a vidului*. În sistemul S.I.,  $\mu_0$  are valoarea (v. par. 4.4.1):

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left( \frac{\text{Henry}}{\text{metru}} \right). \quad (4.16)$$

Relația (4.15) este similară cu relația (2.37) și stabilește analogia dintre mărimile care caracterizează câmpul electric în vid  $\mathbf{E}_v$ ,  $\mathbf{D}_v$  și câmpul magnetic în vid  $\mathbf{H}_v$ ,  $\mathbf{B}_v$ , iar corespondența formală ar fi:

$$\mathbf{E}_v \leftrightarrow \mathbf{H}_v, \text{ respectiv } \mathbf{D}_v \leftrightarrow \mathbf{B}_v. \quad (4.17)$$

Din punctul de vedere al mărimilor primitive și al modului în care ele intervin în expresiile acțiunilor ponderomotoare, corespondența formală este:

$$\mathbf{E}_v \leftrightarrow \mathbf{B}_v, \text{ respectiv } \mathbf{D}_v \leftrightarrow \mathbf{H}_v. \quad (4.18)$$

În sistemul de unități S.I., unitatea lui  $H_v$  (v. par. 4.4.9) se numește *amper pe metru*  $\left(\frac{A}{m}\right)$ .

#### 4.4. CÂMPUL MAGNETIC PRODUS ÎN VID DE CONDUCTOARE PARCURSE DE CURENȚI DE CONDUȚIE

Câmpul magnetic determinat de conductoarele parcurse de curent continuu numit *câmp magnetic staționar* a fost studiat experimental de Biot și Savart. Analiza teoretică a acestor experiențe a fost efectuată în principal de Laplace.

Forțele care se exercită asupra conductoarelor filiforme parcurse de curenți electrici numite *forțe electrodinamice* au fost experimentate de André-Marie Ampère.

Toate experiențele menționate au fost efectuate în aer, dar proprietățile magnetice ale aerului fiind asemănătoare cu cele ale vidului, ele pot fi considerate efectuate în vid.

Teoria câmpului magnetic staționar în vid se elaborează pe baza experiențelor lui Biot, Savart și Ampère, a principiului acțiunii și reacțiunii și a superpoziției efectelor.

În conformitate cu principiul superpoziției, inducția magnetică  $\mathbf{B}_v$  stabilită într-un punct din vid de  $n$  curenți electrici este egală cu suma inducțiilor  $\mathbf{B}_{v_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , pe care le-ar produce în acel punct fiecare dintre curenți:

$$\mathbf{B}_v = \sum_{k=1}^n \mathbf{B}_{v_k} . \quad (4.19)$$

##### 4.4.1. Experiențele lui Ampère

Fie două conductoare filiforme rectilinii dispuse paralel în vid la o distanță  $r$  mult mai mică decât lungimea lor și parcurse de curenții  $i_1$  și  $i_2$  (fig. 5.1). Forțele

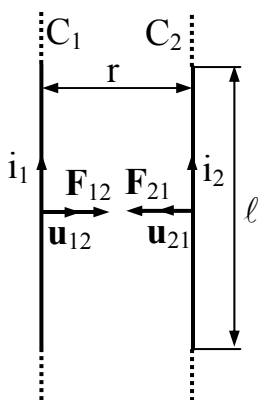


Fig. 4.5

Laplace  $\mathbf{F}_{12}$  respectiv  $\mathbf{F}_{21}$  care se exercită asupra unei porțiuni de lungime  $\ell$  a firelor au următoarele proprietăți:

- satisfac principiul acțiunii și reacțiunii; forța  $\mathbf{F}_{21}$  pe care o exercită primul fir asupra celui de-al doilea este egală și de semn opus cu forța  $\mathbf{F}_{12}$  pe care o exercită cel de-al doilea fir asupra primului:  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ ;
- dacă firele sunt parcurse de curenți în același sens, forțele sunt de atracție, iar dacă sunt de semne opuse, forțele sunt de respingere;
- în valoare absolută forțele sunt proporționale cu produsul curenților  $i_1$  și  $i_2$ , cu lungimea  $\ell$  și invers

proporționale cu distanța  $r$ :

$$F_{12} = F_{21} = \Lambda_m \frac{2i_1 i_2 \ell}{r}, \quad (4.20)$$

unde  $\Lambda_m$  este o constantă universală care se referă la proprietățile magnetice ale vidului, având în S.I. expresia:

$$\Lambda_m = \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad (4.21)$$

$\mu_0$  fiind *permeabilitatea vidului*.

Notând cu  $\mathbf{u}_{12}$ , respectiv  $\mathbf{u}_{21}$  versorii orientați de la firul 1 către firul 2, respectiv de la firul 2 către firul 1, forțele  $\mathbf{F}_{12}$  și  $\mathbf{F}_{21}$  devin:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 \ell}{2\pi r} \mathbf{u}_{12}; \quad \mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 \ell}{2\pi r} \mathbf{u}_{21}. \quad (4.22)$$

Ținând seama de definiția amperului (v. par. 3.3), valoarea lui  $\mu_0$  se obține luând  $r = 1\text{m}$ ,  $\ell = 1\text{m}$ ,  $i_1 = i_2 = 1\text{A}$ ,  $F_{12} = F_{21} = 2 \cdot 10^{-7}\text{N}$ , adică,

$$2 \cdot 10^{-7}\text{N} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{1\text{A} \cdot 1\text{A}}{1\text{m}} \cdot 1\text{m},$$

de unde rezultă

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{N/A}^2 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{H/m}. \quad (4.23)$$

#### 4.4.2. Teorema lui Biot – Savart – Laplace

Se consideră un corp încărcat cu sarcină electrică distribuită cu densitate de volum  $\rho_v$ . Într-un câmp electric de intensitate  $\mathbf{E}_v$ , asupra sarcinii electrice elementare, imobile  $dq = \rho_v dv$  se exercită numai forța electrică elementară (2.4):

$$d\mathbf{F}_{qv} = dq\mathbf{E}_v = \rho_v \mathbf{E}_v dv. \quad (4.24)$$

Într-un câmp magnetic de inducție  $\mathbf{B}_v$ , asupra elementului de volum  $dv$  al unui conductor masiv parcurs de curentul  $i$  care se repartizează cu densitatea de curent  $\mathbf{J}$  acționează forța elementară Laplace (4.11):

$$d\mathbf{F}_{mi} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}_v dv. \quad (4.25)$$

Comparând relațiile (4.24) și (4.25), rezultă că se poate stabili următoarea corespondență formală:

$$\rho_v \leftrightarrow \mathbf{J}. \quad (4.26)$$

Din punctul de vedere al mărimilor primitive și al modului în care ele intervin în expresiile acțiunilor ponderomotoare, corespondența formală dintre mărimile care caracterizează câmpul electric în vid  $\mathbf{E}_v$ ,  $\mathbf{D}_v$  și câmpul magnetic în vid  $\mathbf{B}_v$ ,  $\mathbf{H}_v$  este (4.18):

$$\mathbf{E}_v \leftrightarrow \mathbf{B}_v, \text{ respectiv } \mathbf{D}_v \leftrightarrow \mathbf{H}_v. \quad (4.27)$$

De asemenea, din relațiile (2.37) și (4.15) rezultă următoarea corespondență dintre constantele universale  $\epsilon_0$  și  $\mu_0$ :

$$\frac{1}{\epsilon_0} \leftrightarrow \mu_0. \quad (4.28)$$

Pe de altă parte, câmpul electric produs în vid de corpul încărcat cu sarcină electrică repartizată cu densitate de volum  $\rho_v$  se calculează cu relația (2.110):

$$\mathbf{E}_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \rho_v \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv. \quad (4.29)$$

Ținând seama de corespondențele (4.26), (4.27), (4.28) și de relația (4.29), prin analogie, rezultă expresia inducției magnetice stabilite într-un punct din vid de conductorul masiv parcurs de curentul de conducție  $i$  care se repartizează cu densitatea de curent  $\mathbf{J}$  (fig. 4.6, a):

$$\mathbf{B}_v = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dv. \quad (4.30)$$

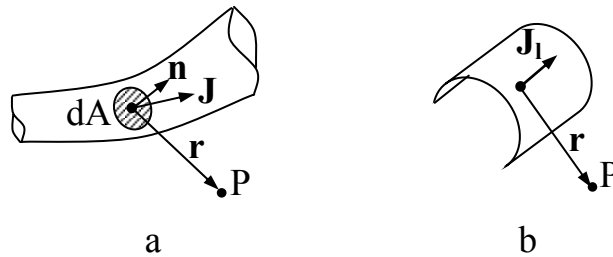


Fig. 4.6

Pentru o pânză de curent de densitate  $\mathbf{J}_1$  pe suprafața  $S$  (fig. 4.6, b) rezultă în mod similar relația:

$$\mathbf{B}_v = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{J}_1 \times \mathbf{r}}{r^3} dA. \quad (4.31)$$

În cazul în care conductorul parcurs de curent este filiform de secțiune constantă  $A$  (fig. 4.7), elementul de volum este dat de relația:

$$dv = A ds = A n ds \quad (4.32)$$

și prin urmare, relația (4.30) devine:

$$\mathbf{B}_v = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} (A n ds). \quad (4.33)$$

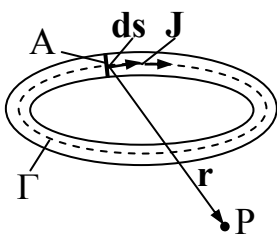


Fig. 4.7



Pentru un conductor filiform vectorii  $\mathbf{J}$ ,  $d\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{A}$  sunt paraleli și de același sens și deci în relația (4.33) vectorii  $\mathbf{J}$  și  $d\mathbf{s}$  se pot substitui, obținându-se:

$$\mathbf{B}_v = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} (A n \mathbf{J}). \quad (4.34)$$

Dar  $i = \mathbf{J} A$  este intensitatea curentului de conducție a cărei valoare este constantă în lungul curbei închise  $\Gamma$  care reprezintă linia medie de curent din conductor și deci relația (4.34) devine:

$$\mathbf{B}_v = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.35)$$

Sensul vectorului  $\mathbf{B}_v$  rezultă din regula burghiului drept care înaintază perpendicular pe planul format de  $d\mathbf{s}$  și  $\mathbf{r}$ , rotindu-l în sensul după care trebuie adus  $d\mathbf{s}$  către  $\mathbf{r}$  pe drumul cel mai scurt.

Relațiile (4.30), (4.31) și (4.35) reprezintă expresiile teoremei Biot – Savart – Laplace pentru diferite repartiții de curent electric în conductoare. Dacă în aceste relații se suprimă permeabilitatea  $\mu_0$ , se obțin formulele Biot – Savart – Laplace de calcul ale intensității câmpului magnetic în vid pentru diferite repartiții de curent electric în conductoare:

$$\mathbf{H}_v = \frac{1}{4\pi} \iiint_v \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dv; \quad \mathbf{H}_v = \frac{1}{4\pi} \iint_s \frac{\mathbf{J}_s \times \mathbf{r}}{r^3} dA; \quad \mathbf{H}_v = \frac{i}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.36)$$

#### 4.4.3. Câmpul magnetic în vid al unor repartiții de curent electric

a. *Câmpul magnetic în vid al unei porțiuni rectilinii de circuit filiform, de lungime  $\ell$ , străbătută de curentul  $i$ .* Se consideră o porțiune de lungime  $\ell$  a unui conductor rectiliniu și filiform parcurs de curentul  $i$  și fie P punctul situat la distanța  $r$  de conductor, în care trebuie calculată inducția magnetică, respectiv intensitatea câmpului magnetic (fig. 4.8). Fie O piciorul perpendicularei din punctul P pe conductor, pe care îl alegem ca origine. Inducția magnetică în punctul P se calculează aplicând teorema Biot – Savart – Laplace (4.35):

$$\mathbf{B}_v(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\mathbf{z} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (4.37)$$

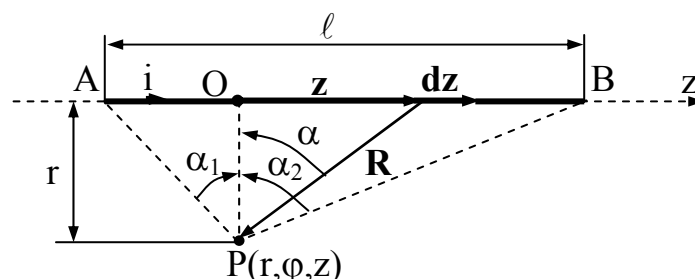


Fig. 4.8

unde curba  $\Gamma$  se consideră închizându-se pe la infinit.

Se observă că produsul vectorial  $d\mathbf{z} \times \mathbf{R}$  este mereu perpendicular pe planul figurii și deci se poate scrie  $d\mathbf{z} \times \mathbf{R} = R \cdot dz \cdot \sin(\mathbf{dz}, \mathbf{R}) \mathbf{u}_\varphi$ , unde  $\mathbf{u}_\varphi$  este versorul normal pe planul figurii, iar  $\sin(\mathbf{dz}, \mathbf{R}) = \sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \cos \alpha$ . Prin urmare, inducția magnetică stabilită în punctul P de porțiunea de lungime  $\ell$  a conductorului rectiliniu și filiform este:

$$\mathbf{B}_v(\mathbf{P}) = \mathbf{u}_\varphi \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_A^B \frac{\cos \alpha}{R^2} dz. \quad (4.38)$$

Ținând seama de relațiile :

$$z = r \operatorname{tg} \alpha; dz = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha; R = \frac{r}{\cos \alpha} \quad (4.39)$$

și deoarece  $r$  este constant, relația (4.38) devine:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_v(\mathbf{P}) &= \mathbf{u}_\varphi \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \mathbf{u}_\varphi \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \\ &= \mathbf{u}_\varphi \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \sin \alpha \Big|_{-\alpha_1}^{\alpha_2} = \mathbf{u}_\varphi \frac{\mu_0 i}{4\pi r} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2). \end{aligned} \quad (4.40)$$

În cazul particular al unui conductor rectiliniu infinit lung,  $\alpha_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  și  $\alpha_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , se obține:

$$\mathbf{B}_v = \mathbf{u}_\varphi \frac{\mu_0 i}{2\pi r}; \mathbf{H}_v = \mathbf{u}_\varphi \frac{i}{2\pi r}. \quad (4.41)$$

Vectorul inducție magnetică  $\mathbf{B}_v$  este situat în plane transversale pe conductor, tangent la cercul de rază  $r$  cu centrul pe conductor și este orientat în

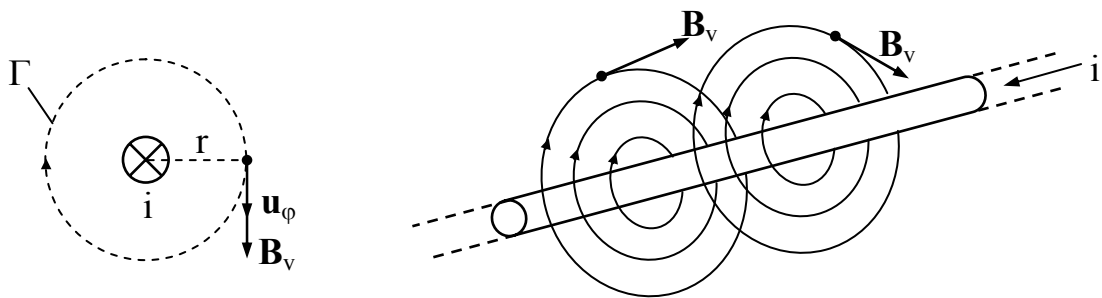


Fig. 4.9

sensul de rotire al burghiului drept care înaintează în sensul de referință al

curentului  $i$  (fig. 4.9). La fel ca intensitatea câmpului electrostatic  $\mathbf{E}$  al firului rectiliniu uniform încărcat cu sarcină electrică, vectorul inducție magnetică  $\mathbf{B}_v$  este invers proporțional cu distanța  $r$  până la fir. Spre deosebire de liniile de câmp ale lui  $\mathbf{E}$ , care sunt radiale și deschise, liniile lui  $\mathbf{B}_v$  sunt circulare și închise.

*b. Câmpul magnetic al unei pânze de curent plane, uniforme, de extensie infinită.* Se consideră un sistem de coordonate carteziene cu originea  $O$  în piciorul perpendicularei pe planul pânzei, coborâtă din punctul  $P$  în care se calculează

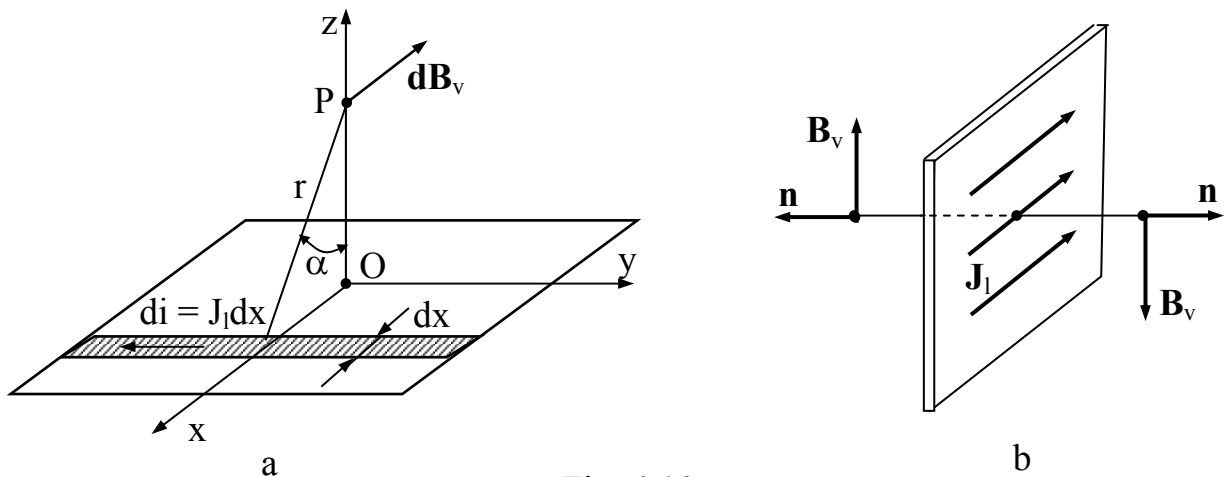


Fig. 4.10

câmpul magnetic (fig. 4.10,a). O fâșie de lățime  $dx$  este echivalentă cu un fir parcurs de curentul elementar  $di = J_1 dx$ , unde  $J_1$  este densitatea pânzei de curent. Inducția magnetică elementară stabilită în punctul  $P$  de firul parcurs de curentul elementar  $di$  se calculează cu relația (4.41) în care se înlocuiește  $i$  cu  $di$ :

$$d\mathbf{B}_v = \frac{\mu_0 di}{2\pi r} \mathbf{u}_\varphi = \frac{\mu_0 J_1 dx}{2\pi r} \mathbf{u}_\varphi. \quad (4.42)$$

Vectorul  $d\mathbf{B}_v$  se descompune în două componente,  $d\mathbf{B}_{vx}$  și  $d\mathbf{B}_{vz}$  după axele  $Ox$  și  $Oz$ :

$$d\mathbf{B}_{vx} = \frac{\mu_0 J_1 \cos \alpha dx}{2\pi r}; \quad d\mathbf{B}_{vz} = \frac{\mu_0 J_1 \sin \alpha dx}{2\pi r}. \quad (4.43)$$

Deoarece  $d\mathbf{B}_{vz}(x) = -d\mathbf{B}_{vz}(-x)$ , rezultă  $\mathbf{B}_{vz} = 0$ .

Prima dintre relațiile (4.43) se poate scrie sub forma următoare:

$$d\mathbf{B}_{vx} = \frac{\mu_0 J_1 z}{2\pi r^2} dx = \frac{\mu_0 J_1 z}{2\pi (x^2 + z^2)} dx \quad (4.44)$$

și prin integrare se obține:

$$\mathbf{B}_{vx} = \frac{\mu_0 J_1 z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + z^2} = \frac{\mu_0 J_1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{z} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0 J_1}{2}. \quad (4.45)$$

Prin urmare, câmpul pânzei de curent plane, uniforme și de extensie infinită este omogen cu liniile inducției magnetice paralele cu planul pânzei (fig. 4.10,b).

c. *Câmpul magnetic al unei spire filiforme, plane, circulare parcursă de curent electric.* Fie o spirală plană circulară, de rază  $a$ , parcursă de curentul  $i$  și un punct  $P$  situat pe axa spirei, normală pe planul acesteia, la distanța  $z$  de acest plan (fig. 4.11). Pentru calculul intensității câmpului magnetic în punctul  $P$  se aplică teorema Biot-Savart-Laplace:

$$\mathbf{H}_v = \frac{i}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (4.46)$$

Fiecare element al spirei, de lungime  $d\mathbf{s}$ , produce un câmp elementar  $d\mathbf{H}_v$

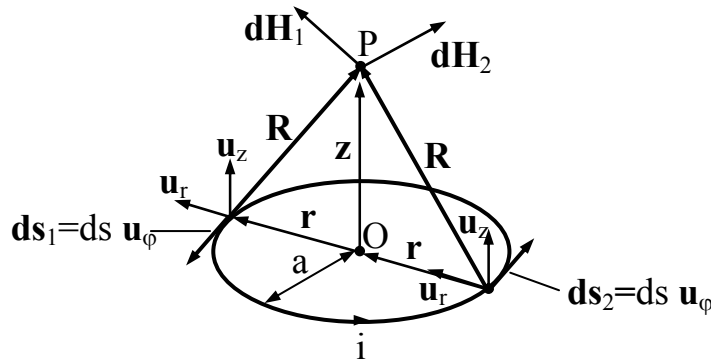


Fig. 4.11

perpendicular pe planul determinat de raza vectorie  $\mathbf{R}$  și elementul de lungime  $d\mathbf{s}$ . Se consideră două elemente ale spirei, de lungimi  $d\mathbf{s}_1$  și  $d\mathbf{s}_2$ , diametral opuse. Intensitatea câmpului magnetic elementar stabilit în punctul  $P$  de elementul de lungime  $d\mathbf{s}_1$ , conform teoremei Biot-Savart-Laplace este:

$$d\mathbf{H}_{v1} = \frac{i}{4\pi} \frac{d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (4.47)$$

unde:

$$d\mathbf{s}_1 = ds \mathbf{u}_\varphi = a d\varphi \mathbf{u}_\varphi; \quad \mathbf{R} = \mathbf{z} - \mathbf{r} = z \mathbf{u}_z - a \mathbf{u}_r. \quad (4.48)$$

Înlocuind în (4.47), se obține :

$$d\mathbf{H}_{v1} = \frac{i}{4\pi} \frac{a d\varphi \mathbf{u}_\varphi \times (z \mathbf{u}_z - a \mathbf{u}_r)}{R^3}, \quad (4.49)$$

sau,

$$d\mathbf{H}_{v1} = \frac{i a d\varphi}{4\pi R^3} (z \mathbf{u}_r + a \mathbf{u}_z), \quad (4.50)$$

unde s-a ținut seama de produsele vectoriale,  $\mathbf{u}_\varphi \times \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_r$  și  $\mathbf{u}_\varphi \times \mathbf{u}_r = -\mathbf{u}_z$ .

Similar, se calculează intensitatea câmpului magnetic elementar stabilit în punctul P de elementul de lungime  $\mathbf{ds}_2$ , diametral opus elementului  $\mathbf{ds}_1$ :

$$d\mathbf{H}_{v2} = \frac{i}{4\pi} \frac{\mathbf{ds}_2 \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (4.51)$$

unde:

$$\mathbf{ds}_2 = ds \mathbf{u}_\varphi = a d\varphi \mathbf{u}_\varphi; \quad \mathbf{R} = \mathbf{z} + \mathbf{r} = z \mathbf{u}_z + a \mathbf{u}_r. \quad (4.52)$$

Înlocuind în (4.51) și ținând seama de produsele vectoriale,  $\mathbf{u}_\varphi \times \mathbf{u}_z = -\mathbf{u}_r$  și  $\mathbf{u}_\varphi \times \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_z$ , rezultă:

$$d\mathbf{H}_{v2} = \frac{ia d\varphi}{4\pi R^3} (-z \mathbf{u}_r + a \mathbf{u}_z). \quad (4.53)$$

Aplicând principiul suprapunerii efectelor, se obține intensitatea câmpului elementar stabilit în punctul P:

$$d\mathbf{H}_v = d\mathbf{H}_{v1} + d\mathbf{H}_{v2} = \frac{ia d\varphi}{4\pi R^3} 2a \mathbf{u}_z = \frac{ia^2 d\varphi}{2\pi R^3} \mathbf{u}_z = \frac{ia^2 d\varphi}{2\pi (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{u}_z. \quad (4.54)$$

Integrând, se obține intensitatea câmpului magnetic stabilit în punctul P de spira circulară:

$$\mathbf{H}_v = \mathbf{u}_z \frac{ia^2}{2\pi (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\pi d\varphi = \frac{ia^2}{2 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{u}_z. \quad (4.55)$$

Rezultă că vectorul intensitate a câmpului magnetic stabilit în punctul P de spira circulară este normal pe planul spirei.

În centrul spirei, adică pentru  $z = 0$ , rezultă:

$$\mathbf{H}_v = \frac{i}{2a} \mathbf{u}_z. \quad (4.56)$$

*d. Câmpul magnetic al unei bobine cilindrice parcursă de curentul  $i$ .* Fie o bobina cu  $N$  spire, lungime  $\ell$  și rază  $a$  (fig. 4.12). Dacă pasul de bobinare este foarte mic, se poate echivala fiecare spiră a bobinei cu o spiră circulară. Considerand spirele uniform distribuite pe unitatea de lungime, un element de lungime  $dz$  este echivalent cu  $\frac{N}{\ell} dz = n dz$  spire, unde  $n$  este numărul de spire pe unitatea de lungime a bobinei. Curentul elementar care străbate elementul de lungime  $dz$  este:

$$di = \frac{Ni}{\ell} dz = n i dz \quad (4.57)$$

și produce în punctul P, situat pe axa de simetrie a bobinei, câmpul magnetic elementar de intensitate (v. relația 4.55):

$$d\mathbf{H}_z = \mathbf{u}_z \frac{a^2 di}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \mathbf{u}_z \frac{ni a^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz. \quad (4.58)$$

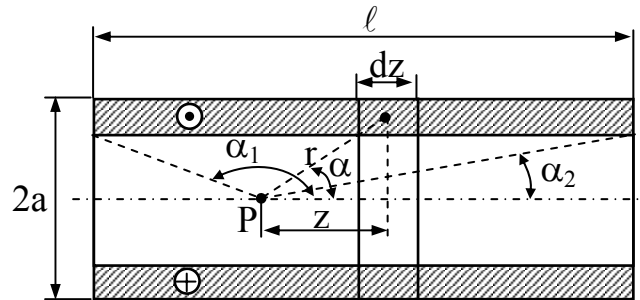


Fig. 4.12

Deoarece,  $z = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$ ,  $dz = -\frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha$ , rezultă :

$$d\mathbf{H}_z = \frac{ni}{2} \frac{\sin^3 \alpha}{a} \left( -\frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha \right) \mathbf{u}_z = -\frac{ni}{2} \sin \alpha d\alpha \mathbf{u}_z. \quad (4.59)$$

Integrând, se obține intensitatea câmpului magnetic stabilit în punctul P de bobina cilindrică circulară:

$$\mathbf{H}_z = -\mathbf{u}_z \frac{ni}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{ni}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \mathbf{u}_z = \frac{Ni}{2\ell} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \mathbf{u}_z. \quad (4.60)$$

Pentru o bobină infinit lungă,  $\alpha_1 \rightarrow \pi$ ,  $\alpha_2 \rightarrow 0$  și relația (4.60) devine:

$$\mathbf{H}_{z(l \rightarrow \infty)} = \frac{Ni}{\ell} \mathbf{u}_z. \quad (4.61)$$

Prin urmare, în interiorul unei bobine infinit lungi, câmpul magnetic este uniform.

#### 4.4.4. Teorema forțelor electrodinamice. Formula lui Ampère-Grassmann

Cu ajutorul formulei lui Biot – Savart – Laplace, Grassmann a stabilit expresia forțelor electrodinamice între curenți filiformi oarecare, generalizând rezultatele obținute de Ampère. Considerăm două fire conductoare  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  parcurse de curenții  $i_1$ ,  $i_2$  (fig. 4.13). Inducția magnetică  $\mathbf{B}_2$  într-un punct al conductorului  $\Gamma_2$ , stabilită de curentul  $i_1$  este:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}. \quad (4.62)$$

Forța electrodinamică care se exercită asupra conductorului  $\Gamma_2$  se calculează cu relația (4.10):

$$\mathbf{F}_{21} = i_2 \oint_{\Gamma_2} d\mathbf{s}_2 \times \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\mathbf{s}_2 \times (d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}. \quad (4.63)$$

Dezvoltând dublul produs vectorial,  $d\mathbf{s}_2 \times (d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}_{12}) = d\mathbf{s}_1 (d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_{12}) - \mathbf{r}_{12} (d\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{s}_1)$ , rezultă:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \left[ \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\mathbf{s}_1 (d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} - \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{r}_{12} (d\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{s}_1)}{r_{12}^3} \right]. \quad (4.64)$$

Deoarece  $\frac{d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = d\mathbf{s}_2 \cdot \left( -\text{grad} \frac{1}{r_{12}} \right) = -d\mathbf{s}_2 \cdot \text{grad} \frac{1}{r_{12}} = -d \left( \frac{1}{r_{12}} \right)$ , prima integrală din relația (4.64) se anulează,

$$\oint_{\Gamma_1} d\mathbf{s}_1 \oint_{\Gamma_2} \frac{d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = - \oint_{\Gamma_1} d\mathbf{s}_1 \oint_{\Gamma_2} d \left( \frac{1}{r_{12}} \right) = 0 \quad (4.65)$$

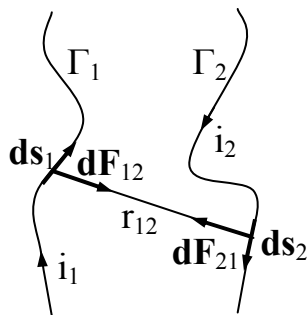


Fig. 4.13

și se obține:

$$\mathbf{F}_{21} = - \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{r}_{12} (d\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{s}_1)}{r_{12}^3}. \quad (4.66)$$

Procedând la fel, se deduce forța electrodinamică  $\mathbf{F}_{12}$  care acționează asupra conductorului  $\Gamma_1$ :

$$\mathbf{F}_{12} = - \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{\mathbf{r}_{21} (d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2)}{r_{21}^3}. \quad (4.67)$$

Relațiile (4.66) și (4.67) se numesc formulele Ampère-Grassmann. Deoarece  $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}$ , forțele electrodinamice respectă principiul acțiunii și reacțiunii:  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ .

#### 4.4.5. Potențialul magnetic vector în vid al conductoarelor parcurse de curenți de conducție

Ținând seama de identitatea,

$$\mathbf{J} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{J} = \text{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{J} = \text{rot} \left( \frac{1}{r} \mathbf{J} \right) - \frac{1}{r} \text{rot} \mathbf{J} = \text{rot} \left( \frac{1}{r} \mathbf{J} \right). \quad (4.68)$$

inducția magnetică stabilită într-un punct P din vid de un conductor masiv parcurs de curentul de conducție  $\mathbf{i}$  care se repartizează cu densitatea de curent  $\mathbf{J}$  (fig. 4.6, a) se determină cu relația lui Biot – Savart – Laplace (4.30), care se poate scrie sub forma:

$$\mathbf{B}_v = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dv = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \left( \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dv = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \operatorname{rot} \left( \frac{\mathbf{J}}{r} \right) dv. \quad (4.69)$$

În relația (4.68)  $\operatorname{rot} \mathbf{J} = 0$ , deoarece vectorul  $\mathbf{J}$  se referă la elementul de volum  $dv$ . Deoarece rotorul este aplicat în punctul P în care se determină vectorul inducție magnetică și nu în puncte din interiorul elementului de volum  $dv$ , operatorul rotor se poate scoate în afara integralei:

$$\mathbf{B}_v = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \iiint_v \frac{\mathbf{J}}{r} dv = \operatorname{rot} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{\mathbf{J}}{r} dv \right). \quad (4.70)$$

Din ecuația (4.70) rezultă că inducția magnetică în vid este rotorul unui vector, notat cu  $\mathbf{A}_v$ , numit *potențial magnetic vector în vid*,

$$\mathbf{B}_v = \operatorname{rot} \mathbf{A}_v, \quad (4.71)$$

unde,

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{\mathbf{J}}{r} dv. \quad (4.72)$$

Pentru o pânză de curent de densitate  $\mathbf{J}_1$  pe suprafața S (fig. 4.6, b) rezultă în mod similar relația:

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_v \frac{\mathbf{J}_1}{r} dv. \quad (4.73)$$

Dacă în expresia inducției magnetice stabilită în vid de un conductor filiform parcurs de curent de conducție (4.35) se ține seama de identitatea:

$$\frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times d\mathbf{s} = \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times d\mathbf{s} = \operatorname{rot} \frac{d\mathbf{s}}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{rot} d\mathbf{s} = \operatorname{rot} \frac{d\mathbf{s}}{r}, \quad (4.74)$$

se obține:

$$\mathbf{B}_v(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{i}}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} = \operatorname{rot} \left[ \frac{\mu_0 \mathbf{i}}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{s}}{r} \right] = \operatorname{rot} \mathbf{A}_v \quad (4.75)$$

și deci potențialul magnetic vector în vid al unui curent filiform este:

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mu_0 \mathbf{i}}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{s}}{r}. \quad (4.76)$$



a. *Potențialul magnetic vector în vid al unui conductor filiform, rectiliniu, infinit lung, parcurs de curentul electric  $i$ .* În coordonate cilindrice (fig. 4.8), ecuația (4.41) devine:

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{u}_r \times \mathbf{A}_v \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \mathbf{u}_\varphi. \quad (4.77)$$

Integrând relația (4.77) între un punct de referință situat la distanța  $r_0$  de conductor și punctul curent situat la distanța  $r$ , se obține:

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r}. \quad (4.78)$$

Potențialul magnetic vector al unui conductor filiform, rectiliniu, infinit lung, parcurs de curentul electric  $i$  este proporțional cu logaritmul natural al distanței la fir și se numește *potențial logaritmice*. Relația (4.78) este analoagă cu expresia potențialului electrostatic al unui fir infinit lung încărcat uniform cu sarcină electrică (2.179).

b. *Potențialul magnetic vector în vid al unei spire circulare plane, parcursă de curent electric.* Alegem originea sistemului de coordonate în centrul spirei, iar

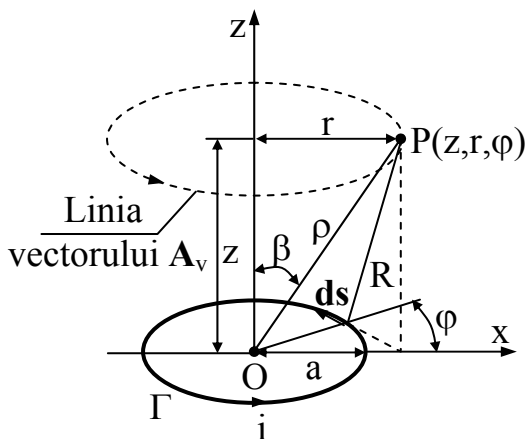


Fig. 4.14

axa Oz este perpendiculară pe planul spirei (fig. 4.14). Considerăm că punctul P, în care calculăm câmpul, este situat la o distanță  $R$  mult mai mare decât raza spirei,  $R \gg a$ . Potențialul magnetic vector în punctul P se calculează cu relația (4.76):

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{s}}{R}. \quad (4.79)$$

Liniile potențialului vector sunt cercuri conținute în plane paralele cu planul spirei  $\Gamma$  și ale căror centre sunt situate pe axa Oz.

Prin urmare vectorul  $\mathbf{A}_v$  are o singură

componentă,  $\mathbf{A}_v = A_v \mathbf{u}_\varphi$ . Ținând seama de figura 4.14, rezultă:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{z^2 + a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi} = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi} = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \beta \cos \varphi} = \\ &= \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \beta \cos \varphi} = \rho \sqrt{1 - 2\frac{a}{\rho} \sin \beta \cos \varphi + \left(\frac{a}{\rho}\right)^2}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Deoarece  $\rho \gg a$ , termenul  $\left(\frac{a}{\rho}\right)^2$  este neglijabil și relația (4.80) devine:

$$R \cong \rho \sqrt{1 - 2 \frac{a}{\rho} \sin \beta \cos \varphi}, \quad (4.81)$$

sau,

$$\frac{1}{R} \cong \frac{1}{\rho} \left( 1 - 2 \frac{a}{\rho} \sin \beta \cos \varphi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.82)$$

Ținând seama de dezvoltarea binomială,

$$(x + y)^n = x^n + n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} y^2 + \dots \quad (4.83)$$

unde  $x = 1$ ,  $y = -2 \frac{a}{\rho} \sin \beta \cos \varphi$ ,  $n = -\frac{1}{2}$  și reținând numai primii doi termeni ai dezvoltării, rezultă:

$$\frac{1}{R} \cong \frac{1}{\rho} \left( 1 + \frac{a}{\rho} \sin \beta \cos \varphi \right). \quad (4.84)$$

Înlocuind expresia (4.84) în relația (4.79) și deoarece elementul de lungime al curbei  $\Gamma$  este  $d\mathbf{s} = ds \mathbf{u}_\varphi = a d\varphi \mathbf{u}_\varphi$ , se obține:

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mu_0 i a}{4\pi \rho} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_\varphi \left( 1 + \frac{a}{\rho} \sin \beta \cos \varphi \right) d\varphi. \quad (4.85)$$

Deoarece,  $\mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_x \sin \varphi + \mathbf{u}_y \cos \varphi$  relația (4.85) devine:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_v &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi \rho} \int_0^{2\pi} (-\mathbf{u}_x \sin \varphi + \mathbf{u}_y \cos \varphi) \left( 1 + \frac{a}{\rho} \sin \beta \cos \varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{\mu_0 i a^2}{4\pi \rho^2} \sin \beta \int_0^{2\pi} (-\mathbf{u}_x \sin \varphi \cos \varphi + \mathbf{u}_y \cos^2 \varphi) d\varphi = \mathbf{u}_y \frac{\mu_0 i a^2}{4\rho^2} \sin \beta. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Datorită simetriei cilindrice, rezultă:

$$\mathbf{A}_v = \mathbf{u}_\varphi \frac{\mu_0 i a^2}{4\rho^2} \sin \beta. \quad (4.87)$$

Pentru o bobină cu  $N$  spire relația (4.87) devine:

$$\mathbf{A}_v = \mathbf{u}_\varphi \frac{\mu_0 N i a^2}{4\rho^2} \sin \beta. \quad (4.88)$$

#### 4.4.6. Teorema fluxului magnetic în vid

Se numește *flux magnetic*, mărimea scalară egală cu integrala de suprafață a produsului scalar dintre inducția magnetică și elementul de suprafață, cu simbolul  $\Phi_{S_\Gamma}$  dacă suprafața este deschisă  $S_\Gamma$  și  $\Phi_\Sigma$  dacă suprafața este închisă  $\Sigma$ ,

$$\Phi_{S_\Gamma} = \iint_{S_\Gamma} \mathbf{B}_v \cdot \mathbf{n} dA \quad ; \quad \Phi_\Sigma = \oiint_{\Sigma} \mathbf{B}_v \cdot \mathbf{n} dA . \quad (4.89)$$

Fluxul magnetic este o mărime derivată care caracterizează global câmpul magnetic referitor la o suprafață și sensul de referință corespunde sensului versorului  $\mathbf{n}$  dacă suprafața este închisă ( $\Sigma$ ) sau sensului versorului elementului de suprafață  $d\mathbf{A}$  asociat sensului curbei  $\Gamma$  dacă suprafața este deschisă ( $S_\Gamma$ ).

În sistemul de unități S.I., unitatea de flux magnetic numită *weber* (Wb) este egală cu fluxul magnetic printr-o suprafață plană de un metru pătrat, traversată de inducția magnetică de un tesla.

Dacă se aplică operatorul divergență relației (4.71) și se ține seama de faptul că divergența rotorului unui vector este identic nulă, rezultă:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_v = 0 . \quad (4.90)$$

Deci, în fiecare punct din vid, divergența inducției magnetice este identic nulă. Prin urmare, inducția magnetică în vid este un *câmp de vectori solenoidal*.

Relația (4.90) constituie *forma locală a teoremei fluxului magnetic în vid*. Ținând seama de relația (4.90), fluxul magnetic printr-o suprafață închisă oarecare este nul:

$$\Phi_\Sigma = \oiint_{\Sigma} \mathbf{B}_v \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{v_\Sigma} \operatorname{div} \mathbf{B}_v \cdot dv = 0 . \quad (4.91)$$

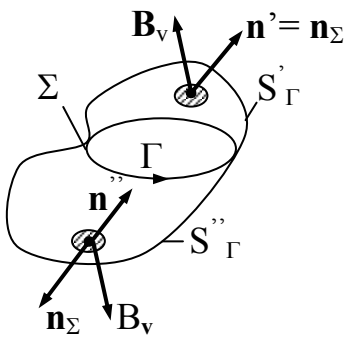


Fig. 4.15

Fluxul  $\Phi_\Sigma$  prin suprafața  $\Sigma$  se descompune în diferența fluxurilor  $\Phi_{S'_\Gamma}$  și  $\Phi_{S''_\Gamma}$ :

$$\Phi_\Sigma = \oiint_{\Sigma} \mathbf{B}_v \cdot \mathbf{n}_\Sigma dA = \iint_{S'_\Gamma} \mathbf{B}_v \cdot \mathbf{n}' dA - \iint_{S''_\Gamma} \mathbf{B}_v \cdot \mathbf{n}'' dA = \Phi_{S'_\Gamma} - \Phi_{S''_\Gamma} . \quad (4.92)$$

Conform teoremei fluxului magnetic în vid,  $\Phi_\Sigma = 0$  (4.91) și deci:

$$\Phi_{S'_\Gamma} = \Phi_{S''_\Gamma} . \quad (4.93)$$

Din teorema fluxului magnetic în vid rezultă următoarele concluzii importante:

- Fluxul magnetic  $\Phi_{S_\Gamma}$  prin orice suprafață deschisă  $S_\Gamma$  care se sprijină pe curba închisă  $\Gamma$  este același (4.93);
- Din compararea formei locale a teoremei fluxului electric (2.100) cu forma locală a teoremei fluxului magnetic (4.90), rezultă că un câmp de vectori  $\mathbf{B}_v$  nu are surse (deoarece  $\text{div}\mathbf{B}_v = 0$ ). Prin urmare, se poate face afirmația echivalentă, că, în concordanță cu relațiile (4.90) și (4.91), nu există sarcini magnetice adevărate similare cu sarcinile electrice adevărate sau că în câmpul magnetic nu se pot exercita forțe magnetice cu direcția și sensul vectorului  $\mathbf{B}_v$ ;
- Într-un câmp vectorial pentru care divergența este nulă, numit *câmp de vectori solenoidal*, liniile de câmp sunt totdeauna închise. Deci liniile inducției magnetice sunt totdeauna linii închise, deoarece în câmp magnetic nu există sarcini magnetice ;
- Ținând seama de relația (4.71) și utilizând teorema lui Stokes, fluxul magnetic printr-o suprafață deschisă  $S_\Gamma$  care se sprijină pe curba închisă  $\Gamma$  se poate exprima prin relația:

$$\Phi_{S_\Gamma} = \iint_{S_\Gamma} \mathbf{B}_v \cdot \mathbf{n} \, dA = \iint_{S_\Gamma} \text{rot}\mathbf{A}_v \cdot \mathbf{n} \, dA = \oint_{\Gamma} \mathbf{A}_v \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.94)$$

#### 4.4.7. Potențialul magnetic scalar neuniform al câmpului magnetic în vid

Se urmărește transformarea integralei de linie din expresia potențialului magnetic vector stabilit de curentul filiform  $i$  într-un punct  $P$  din vid (4.76) într-o integrală de suprafață. În acest sens, se calculează produsul scalar dintre vectorul  $\mathbf{A}_v$  și un vector constant oarecare  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{A}_v = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\mathbf{F}}{r} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.95)$$

Folosind teorema lui Stokes, se poate scrie:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{A}_v = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \iint_{S_\Gamma} \text{rot}\left(\frac{\mathbf{F}}{r}\right) \cdot d\mathbf{A}, \quad (4.96)$$

unde  $S_\Gamma$  este suprafața spirei filiforme parcursă de curent.

Se va utiliza identitatea:

$$\text{rot}\left(\frac{1}{r}\mathbf{F}\right) = \frac{1}{r}\text{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F} \times \text{grad}\frac{1}{r} = \mathbf{F} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (4.97)$$

în care  $\text{rot}\mathbf{F} = 0$  și  $\text{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ .

Deoarece în expresia potențialului vector (4.76) intervine vectorul de poziție  $\mathbf{r}$  orientat de la spiră spre punctul considerat P, iar conform relației (4.96) urmează să se calculeze gradientul și rotorul pe suprafața  $S_\Gamma$  a spirei, se va înlocui  $\mathbf{r}$  prin  $\mathbf{r}'$  ( $\mathbf{r} = -\mathbf{r}'$ ) orientat de la punctul P spre spiră. Prin urmare, relația (4.96) devine:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{A}_v = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \iint_{S_\Gamma} \left( \mathbf{F} \times \frac{\mathbf{r}'}{(\mathbf{r}')^3} \right) d\mathbf{A} . \quad (4.98)$$

Ținând seama de faptul că produsul mixt a trei vectori are proprietatea de permutare ciclică, relația (4.98) se poate scrie sub forma:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{A}_v = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \mathbf{F} \iint_{S_\Gamma} \left( \frac{\mathbf{r}'}{(\mathbf{r}')^3} \times d\mathbf{A} \right) . \quad (4.99)$$

Deoarece vectorul  $\mathbf{F}$  este oarecare, iar  $\mathbf{r} = -\mathbf{r}'$ , rezultă:

$$\mathbf{A}_v = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \iint_{S_\Gamma} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times d\mathbf{A} \right) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \iint_{S_\Gamma} \left( d\mathbf{A} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) . \quad (4.100)$$

Cunoscând potențialul vector, se poate determina inducția magnetică în punctul P:

$$\mathbf{B}_v = \text{rot } \mathbf{A}_v = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \iint_{S_\Gamma} \text{rot} \left( d\mathbf{A} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) . \quad (4.101)$$

Se va utiliza identitatea:

$$\text{rot} \left( d\mathbf{A} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = d\mathbf{A} \text{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} - (d\mathbf{A} \text{grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \text{grad} \right) d\mathbf{A} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \text{div} d\mathbf{A} , \quad (4.102)$$

în care  $\text{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\text{div} \text{grad} \frac{1}{r} = -\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0$ . Ținând seama de faptul că vectorul element de suprafață  $d\mathbf{A}$  este constant, identitatea (4.102) devine:

$$\text{rot} \left( d\mathbf{A} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -(d\mathbf{A} \text{grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} . \quad (4.103)$$

Utilizând identitatea:

$$\text{grad} \left( d\mathbf{A} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = d\mathbf{A} \times \text{rot} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + (d\mathbf{A} \text{grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \text{rot} d\mathbf{A} + \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \text{grad} \right) d\mathbf{A} , \quad (4.104)$$

în care:  $\text{rot} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$ ,  $\text{rot} d\mathbf{A} = 0$ ,  $\left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \text{grad} \right) d\mathbf{A} = 0$ , relația (4.103) devine:

$$\text{rot} \left( d\mathbf{A} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -(d\mathbf{A} \text{grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\text{grad} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{A}}{r^3} . \quad (4.105)$$

Prin urmare, ținând seama de relația (4.105), inducția magnetică în punctul considerat P se calculează cu relația (4.101):

$$\mathbf{B}_v = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \iint_{S_\Gamma} \text{grad} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{A}}{r^3} . \quad (4.106)$$

Intensitatea câmpului magnetic în punctul P din vid va fi:

$$\mathbf{H}_v = -\frac{i}{4\pi} \iint_{S_\Gamma} \text{grad} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{A}}{r^3} = -\frac{i}{4\pi} \text{grad} \iint_{S_\Gamma} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{A}}{r^3} = -\frac{i}{4\pi} \text{grad} \Omega_p, \quad (4.107)$$

unde

$$\Omega_p = \iint_{S_\Gamma} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{A}}{r^3} \quad (4.108)$$

este unghiul solid sub care se vede curba curentului filiform  $\Gamma$  din punctul P, situat în vid, în care se calculează câmpul. Relația (4.107) se poate scrie și sub forma:

$$\mathbf{H}_v = -\text{grad} \left( \frac{i}{4\pi} \Omega_p \right) = -\text{grad} V_{mp}, \quad (4.109)$$

unde mărimea scalară

$$V_{mp} = \frac{i}{4\pi} \Omega_p = \frac{i}{4\pi} \iint_{S_\Gamma} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{A}}{r^3} \quad (4.110)$$

al cărei gradient cu semn schimbat este intensitatea câmpului magnetic  $\mathbf{H}_v$ , se numește *potențial magnetic scalar*.

Ținând seama de relația  $\text{rot grad} V_m = 0$ , rezultă:

$$\text{rot} \mathbf{H}_v = 0, \quad (4.111)$$

adică câmpul magnetic în vid (în punctele în care densitatea de curent este nulă,  $\mathbf{J} = 0$ , vezi par. 4.7.1) stabilit de curentul electric de conducție este *irotațional*.

Relația (4.109) se mai poate scrie sub forma:

$$dV_m = -\mathbf{H}_v ds, \quad (4.112)$$

$d\mathbf{l}$  fiind vectorul poziției relative a două puncte infinit vecine, între potențialele cărora există diferența  $dV_m$ . Integrând relația (4.112) între un punct de referință  $P_0$  și un punct oarecare P, rezultă că potențialul magnetic scalar în punctul P are o expresie similară cu a potențialului electrostatic (2.148):

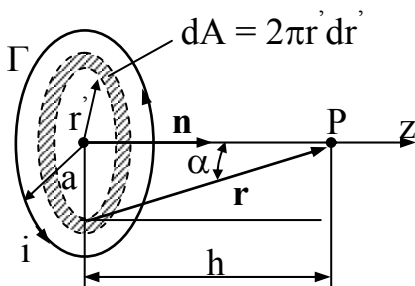


Fig. 4.16

$$V_{mP} = V_{mP_0} - \int_{P_0}^P \mathbf{H}_v \, ds, \quad (4.113)$$

unde  $V_{mP_0}$  este potențialul magnetic scalar al punctului de referință  $P_0$ .

*a. Potențialul magnetic scalar al unei spire plane circulare, parcursă de curent electric.* Fie un punct  $P$  situat pe axa spirei de rază  $a$  la înălțimea  $h$  (fig. 4.16). Unghiul solid sub care se vede spira din punctul  $P$ , conform relației (4.108), este:

$$\Omega_p = \iint_{S_r} \frac{\mathbf{r} \, d\mathbf{A}}{r^3} = \iint_{S_r} \frac{\mathbf{r} \, \mathbf{n} \, dA}{r^3} = \iint_{S_r} \frac{\cos\alpha}{r^2} \, dA, \quad (4.114)$$

unde  $\cos\alpha = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{(r')^2 + h^2}}$  și  $dA = 2\pi r' \, dr'$ .

Rezultă:

$$\Omega_p = 2\pi h \int_0^a \frac{r' \, dr'}{\left[ (r')^2 + h^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = -2\pi h \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + h^2}} \Big|_0^a = 2\pi \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right). \quad (4.115)$$

Potențialul magnetic scalar în punctul  $P$ , conform relației (4.110), este:

$$V_{mP} = \frac{i}{4\pi} \Omega_p = \frac{i}{2} \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right). \quad (4.116)$$

Utilizând relația (4.112) se poate calcula intensitatea câmpului magnetic în punctul  $P$ .

$$H_v = -\frac{dV_{mP}}{dh} = \frac{i}{2} \frac{a^2}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.117)$$

În centrul spirei,  $h = 0$  rezultă:

$$H_v = \frac{i}{2a}. \quad (4.118)$$

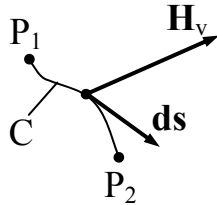
Procedând în acest mod, s-a regăsit relația (4.56) stabilită cu ajutorul teoremei Biot – Savart – Laplace.

#### 4.4.8. Tensiune magnetică și tensiune magnetomotoare

Tensiunea magnetică este o mărime derivată importantă atât teoretic referitor la determinarea naturii câmpului magnetic, cât și aplicativ, fiind o mărime

măsurabilă. La fel ca în cazul câmpului electric în care tensiunea electrică se definește cu intensitatea câmpului electric, în conformitate cu corespondența (4.17), în câmp magnetic tensiunea magnetică se definește cu intensitatea câmpului magnetic.

Se numește *tensiune magnetică*, cu simbolul  $u_{m12}$ , mărimea scalară egală cu



integrala de linie a produselor scalare dintre intensitatea câmpului magnetic și elementul de lungime  $ds$  între punctele  $P_1$  și  $P_2$  ale curbei  $C$  (fig. 4.17):

$$u_{m12} = \int_{P_1(C)}^{P_2} \mathbf{H}_v \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.119)$$

Fig. 4.17

În regimuri statice și staționare, tensiunea magnetică este invariabilă în timp și se notează cu simbolul  $U_{m12}$ ; dacă este variabilă în timp se notează cu simbolul  $u_{m12}$  și se numește *tensiune magnetică instantanee*.

Tensiunea magnetică este o mărime derivată care caracterizează global câmpul magnetic referitor la o curbă  $C$  dată, între două puncte ale acesteia. Sensul de integrare, adică sensul elementului de arc al curbei  $C$ , se numește *sens de referință al tensiunii magnetice* de la punctul  $P_1$  la punctul  $P_2$ . Dacă se suprimă indicii, sensul de referință al tensiunii magnetice se indică explicit printr-o săgeată orientată de la  $P_1$  la  $P_2$ .

Integrala de linie a intensității câmpului magnetic efectuată pe o curbă închisă  $\Gamma$  se numește tensiune magnetomotoare

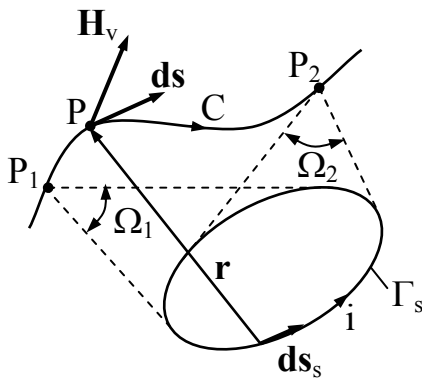


Fig. 4.18

$u_{m\Gamma}$ :

$$u_{m\Gamma} = \oint_{\Gamma} \mathbf{H}_v \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.120)$$

Unitatea S.I. de tensiune magnetică sau magnetomotoare este aceeași cu a intensității curentului electric, amperul (v. par. 4.4.9).

**Tensiunea magnetică în câmpul unei spire parcurse de curent.** Se consideră o curbă deschisă  $C$  de formă oarecare în câmpul magnetic al unei spire filiforme  $\Gamma_s$  parcursă de

curentul electric  $i$  (fig. 4.18). Utilizând relația (4.120), în care  $\mathbf{H}_v$  se înlocuiește cu expresia (4.109), se calculează tensiunea magnetică între punctele  $P_1$  și  $P_2$  ale curbei  $C$ :

$$u_{m12} = \int_{P_1(C)}^{P_2} \mathbf{H}_v \cdot d\mathbf{s} = -\frac{i}{4\pi} \int_{P_1(C)}^{P_2} d\mathbf{s} \cdot \text{grad} \Omega_P = \frac{i}{4\pi} (\Omega_{P_1} - \Omega_{P_2}) = V_{mP_1} - V_{mP_2}. \quad (4.121)$$

Dacă punctul  $P_1$  este un punct curent  $P$  și  $P_2$  punct de referință  $P_0$ , din relația (4.121) se obține expresia potențialului magnetic scalar în punctul  $P$ ,



$$V_{mP} = V_{mP_0} - \int_{P_0}^P \mathbf{H}_v \mathbf{ds}, \quad (4.122)$$

identică cu relația (4.113).

#### 4.4.9. Teorema lui Ampère în vid

Dacă în câmp electrostatic integrala curbilinie a vectorului  $\mathbf{E}_v$  în lungul oricărei curbe închise este identic nulă  $\oint_{\Gamma} \mathbf{E}_v \mathbf{ds} = 0$ , în câmp magnetic relația similară  $\oint_{\Gamma} \mathbf{H}_v \mathbf{ds} = 0$  nu este totdeauna satisfăcută.

Fie o spirală filiformă  $\Gamma$  parcursă de curentul  $i$  și o curbă închisă  $\Gamma_e$  de formă oarecare trasată prin vid și care nu înlănțuie curba  $\Gamma$  parcursă de  $i$  (fig. 4.19,a). Tensiunea magnetică între punctele  $P_1$  și  $P$  situate pe curba  $\Gamma_e$  se calculează cu relația (4.121),

$$u_{mP_1P} = \frac{i}{4\pi} (\Omega_{P_1} - \Omega_P) = V_{mP_1} - V_{mP}, \quad (4.123)$$

unde  $\Omega_{P_1}$ , respectiv  $\Omega_P$  este unghiul solid sub care se vede curba  $\Gamma$  din punctul  $P_1$ ,

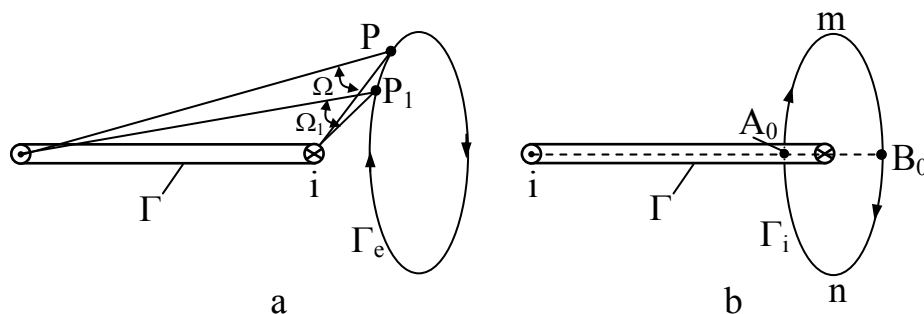


Fig. 4.19

respectiv  $P$ .

Se parcurge curba închisă  $\Gamma_e$  în sensul ei de referință și la limită, pentru  $P \rightarrow P_1$ , după parcurgerea curbei  $\Gamma_e$ , se obține tensiunea magnetomotoare  $u_{m\Gamma_e}$ :

$$u_{m\Gamma_e} = \lim_{P \rightarrow P_1} u_{mP_1P} = V_{mP_1} - \lim_{P \rightarrow P_1} V_{mP}. \quad (4.124)$$

În cazul curbei  $\Gamma_e$ , potențialul magnetic  $V_{mP}$  variază continuu în lungul curbei, ajungând în punctul  $P_1$  cu aceeași valoare  $V_{mP_1}$ ,  $\lim_{P \rightarrow P_1} V_{mP} = V_{mP_1}$  și deci:

$$u_{m\Gamma_e} = V_{mP_1} - V_{mP_1} = 0. \quad (4.125)$$

Prin urmare, tensiunea magnetomotoare în lungul unei curbe închise  $\Gamma_e$  de formă oarecare trasată prin vid și care nu înlănțuie conductoare parcurse de curent electric este identic nulă:

$$\mathbf{u}_{m\Gamma_e} = \oint_{\Gamma_e} \mathbf{H}_v \mathbf{ds} = 0. \quad (4.126)$$

Fie o curbă închisă  $\Gamma_i$  care înlănțuie spira  $\Gamma$  parcursă de curentul  $i$  (fig. 4.19, b). Sensul de referință al curbei  $\Gamma_i$  este asociat sensului curentului din spira  $\Gamma$ . Tensiunea magnetomotoare  $\mathbf{u}_{m\Gamma_i}$  în lungul curbei închise  $\Gamma_i$  este:

$$\mathbf{u}_{m\Gamma_i} = \oint_{\Gamma_i} \mathbf{H}_v \mathbf{ds} = \int_{A_0(m)}^{B_0} \mathbf{H}_v \mathbf{ds} + \int_{B_0(n)}^{A_0} \mathbf{H}_v \mathbf{ds}, \quad (4.127)$$

Ținând seama de faptul că din punctul  $A_0$  fața superioară, respectiv inferioară a curbei  $\Gamma$  se vede sub unghiul solid  $\Omega_{A_0}^s = 2\pi$ , respectiv  $\Omega_{A_0}^i = -2\pi$  și că din punctul  $B_0$  curba  $\Gamma$  se vede sub unghiul solid  $\Omega_{B_0} = 0$ , rezultă:

$$\begin{aligned} \int_{A_0(m)}^{B_0} \mathbf{H}_v \mathbf{ds} &= -\frac{i}{4\pi} \int_{A_0(m)}^{B_0} \text{grad}\Omega \mathbf{ds} = -\frac{i}{4\pi} \int_{A_0(m)}^{B_0} d\Omega = \\ &= -\frac{i}{4\pi} (\Omega_{B_0} - \Omega_{A_0}^s) = \frac{i}{4\pi} \Omega_{A_0}^s = \frac{i}{4\pi} 2\pi = \frac{i}{2}; \end{aligned} \quad (4.128)$$

$$\begin{aligned} \int_{B_0(n)}^{A_0} \mathbf{H}_v \mathbf{ds} &= -\frac{i}{4\pi} \int_{B_0(n)}^{A_0} \text{grad}\Omega \mathbf{ds} = -\frac{i}{4\pi} \int_{B_0(n)}^{A_0} d\Omega = \\ &= -\frac{i}{4\pi} (\Omega_{A_0}^i - \Omega_{B_0}) = -\frac{i}{4\pi} (\Omega_{A_0}^i) = -\frac{i}{4\pi} (-2\pi) = \frac{i}{2}. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Înlocuind expresiile (4.128) și (4.129) în relația (4.127) se obține:

$$\mathbf{u}_{m\Gamma_i} = \frac{i}{2} + \frac{i}{2} = i. \quad (4.130)$$

Rezultă că tensiunea magnetomotoare în lungul unei curbe închise  $\Gamma_i$  de formă oarecare este egală cu intensitatea curentului pe care-l înlănțuie:

$$\mathbf{u}_{m\Gamma_i} = \oint_{\Gamma_i} \mathbf{H}_v \mathbf{ds} = i. \quad (4.131)$$

Tensiunea magnetomotoare depinde numai de curentul electric de conducție pe care îl înlănțuie curba închisă  $\Gamma_i$  și nu depinde de modul cum se repartizează în conductoare, care poate fi cu densitate de curent  $\mathbf{J}$ , cu repartiție superficială sub forma pânzei de curent cu densitate  $\mathbf{J}_1$  sau curenți filiformi  $i_k$ . Dacă  $S_{\Gamma_i}$  este o suprafață deschisă care se sprijină pe curba închisă  $\Gamma_i$  trasată exclusiv prin vid, curentul electric total pe care îl înlănțuie curba  $\Gamma_i$  este egal cu curentul total  $i_{S_{\Gamma_i}}$ , respectiv solenația  $\theta_{S_{\Gamma_i}}$  (3.37) care înțepă suprafața  $S_{\Gamma_i}$ . Relația (4.131) scrisă sub forma:

$$u_{m\Gamma_i} = \oint_{\Gamma_i} \mathbf{H}_v \cdot d\mathbf{s} = i_{S\Gamma_i} = \theta_{S\Gamma_i} \quad (4.132)$$

constituie teorema lui Ampère în vid: *tensiunea magnetomotoare în lungul unei curbe închise  $\Gamma_i$  trasate prin vid este egală cu curentul total, respectiv solenația prin orice suprafață deschisă care se sprijină pe curba închisă  $\Gamma_i$ .*

Observație. *Integrala curbilinie a intensității câmpului magnetic având valori diferite după cum curba înlănțuie (4.131) sau nu înlănțuie (4.126) curent electric, potențialul magnetic scalar  $V_m$  este o funcție de punct neuniformă.*

Dacă curba  $\Gamma_i$  înlănțuie spirele unei bobine cu  $N$  spire, teorema lui Ampère devine:

$$u_{m\Gamma_i} = \oint_{\Gamma_i} \mathbf{H}_v \cdot d\mathbf{s} = Ni, \quad (4.133)$$

sau

$$\oint_{\Gamma_i} \mathbf{B}_v \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 Ni. \quad (4.134)$$

Din relația (4.131) rezultă că în S.I. unitatea de măsură pentru tensiunea magnetomotoare este amperul, iar pentru intensitatea câmpului magnetic amper pe metru (A/m).

## 4.5. STAREA DE MAGNETIZARE. MOMENTUL MAGNETIC

În afară de conductoarele parcurse de curent de conducție și de corpurile încărcate cu sarcini electrice în mișcare, se mai pot exercita acțiuni ponderomotoare și asupra unor corpuri situate în câmp magnetic, dintre care cele mai importante sunt corpurile feromagnetice. Materialele din această clasă, cum este de exemplu magnetita, chiar și fără un tratament prealabil produce câmp magnetic la fel ca sarcinile electrice în mișcare sau curentul electric de conducție. Alte materiale din această clasă cum sunt fierul, oțelul, nichelul, cobaltul și aliaje ale acestora, aduse în prealabil în câmp magnetic exterior, după suprimarea acestuia produc câmp magnetic la fel ca magnetita; în această stare ele se numesc *magneți permanenți*.

Starea corpurilor care în câmp magnetic sunt acționate de forțe și cupluri suplimentare față de cele condiționate de starea lor electrocinetică sau de starea de încărcare cu sarcină electrică în mișcare, se numește *stare de magnetizare*, respectiv de *polarizare magnetică*. Corpurile aflate în stare de magnetizare se numesc *magnetizate*.

### 4.5.1. Momentul magnetic

Se consideră un câmp magnetic omogen de inducție  $\mathbf{B}_v$  și se aduc într-un punct oarecare mici corpuri magnetizate. Oricât de mici ar fi aceste corpuri, ele nu

pot fi considerate puncte materiale, deoarece sunt acționate de cupluri. Se constată că pentru o anumită orientare a corpurilor în raport cu vectorul  $\mathbf{B}_v$ , cuplul se anulează; dreapta trasată pe corpul aflat în echilibru stabil și orientată în sensul vectorului  $\mathbf{B}_v$  se numește *axă de magnetizare*. În orice poziție s-ar afla corpul, rotindu-l în jurul axei sale de magnetizare de versor  $\mathbf{u}_m$ , cuplul rămâne neschimbat, axa de rotație formează cu versorul  $\mathbf{u}_m$  și vectorul  $\mathbf{B}_v$  un triedru drept în poziția de cuplu maxim. Printr-o analiză similară cu a stării de polarizare electrică a unui mic corp dielectric, cuplul  $\mathbf{C}_m$  care acționează asupra micului corp magnetizat are o expresie analoagă expresiei cuplului electric (2.39):

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_v. \quad (4.135)$$

Mărimea vectorială  $\mathbf{m}$  caracterizează starea de magnetizare a micului corp magnetizat și se numește *moment magnetic*. Deoarece momentul magnetic  $\mathbf{m}$ , la fel ca cel electric, s-a introdus exclusiv prin interpretarea datelor experimentale, este o mărime primitivă, cu relația de detectare (4.135). Din punctul de vedere al unității de măsură, momentul magnetic este o mărime secundară. În sistemul S.I. unitatea de moment magnetic este *amper-metru pătrat* ( $\text{Am}^2$ ) (v. par. 4.6.1).

Dacă micul corp magnetizat, de moment magnetic  $\mathbf{m}$ , este situat într-un câmp magnetic staționar și local neuniform, asupra acestuia acționează în plus și o forță  $\mathbf{F}_m$  care are o expresie similară cu forța electrică  $\mathbf{F}_p$  (2.41):

$$\mathbf{F}_m = \text{grad} \left( \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_v \right) = (\mathbf{m} \text{ grad}) \mathbf{B}_v. \quad (4.136)$$

Deoarece produsul scalar  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_v$  crește cu modulul vectorului  $\mathbf{B}_v$ , forța magnetică  $\mathbf{F}_m$  tinde să deplaseze corpul magnetizat spre regiunile unde câmpul este mai intens.

În câmp magnetic uniform, forța  $\mathbf{F}_m$  este nulă și asupra corpului se exercită numai cuplul  $\mathbf{C}_m$  (4.135).

Acțiunile ponderomotoare ale câmpului magnetic asupra unui mic corp magnetizat, imobil, de moment magnetic  $\mathbf{m}$  și în stare electrocinetică nulă, constă din:

- forța magnetică  $\mathbf{F}_m$  (4.136), nenulă numai în câmp magnetic neomogen;
- cuplul rezultat  $\mathbf{C}_{m,e}$  care conține o componentă datorată forței  $\mathbf{F}_m$  și o componentă de forma (4.135),

$$\mathbf{C}_{m,e} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_m + \mathbf{C}_m = \mathbf{r} \times (\mathbf{m} \text{ grad}) \mathbf{B}_v + \mathbf{m} \times \mathbf{B}_v, \quad (4.137)$$

unde  $\mathbf{r}$  este raza vectorială a punctului în care se găsește corpul magnetizat în raport cu originea referențialului.

Comparând expresiile (4.136), (4.137) cu cele corespunzătoare din cazul câmpului electric (2.43), (2.44), se constată că în câmp magnetic nu intervin termeni similari cu  $q\mathbf{E}_v$  și  $\mathbf{r} \times q\mathbf{E}_v$ . Deoarece în natură nu se constată forțe magnetice paralele și proporționale cu inducția magnetică  $\mathbf{B}_v$  de forma  $q\mathbf{B}_v$ , rezultă că nu există sarcină magnetică similară sarcinii electrice.

### 4.5.2. Magnetizația

Starea de magnetizare a unui corp foarte mic este complet caracterizată de momentul său magnetic. Momentul magnetic  $\mathbf{m}$  este însă insuficient pentru a descrie complet starea de magnetizare a corpurilor masive magnetizate. Descrierea locală a stării de magnetizare a unui corp masiv magnetizat necesită introducerea unei mărimi derivate numită *magnetizație*.

Prin fragmentarea macroscopică a unui corp magnetizat finit, fiecare fragment de volum  $\Delta v$  are un moment magnetic elementar  $\Delta \mathbf{m}$ . Starea de magnetizare a corpului finit se caracterizează local prin mărimea vectorială egală cu densitatea de volum a momentului magnetic, numită *magnetizație*  $\mathbf{M}$ ,

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta v} = \frac{d\mathbf{m}}{dv} . \quad (4.138)$$

Momentul magnetic rezultat  $\mathbf{m}$  al corpului este egal cu integrala magnetizației  $\mathbf{M}$  efectuată pe volumul  $v$ ,

$$\mathbf{m} = \iiint_v \mathbf{M} dv . \quad (4.139)$$

Liniile vectorului  $\mathbf{M}$  sunt situate în interiorul corpurilor.

Pentru majoritatea corpurilor, experiența pune în evidență o dependență mai mare sau mai mică a stării lor de magnetizare de câmpul magnetic în care se găsesc. Corpurile al căror moment magnetic se anulează după suprimarea câmpului magnetic în care au fost aduse se numesc cu *magnetizare temporară*, iar mărimile care le caracterizează sunt *momentul magnetic temporar*  $\mathbf{m}_t$  și *magnetizația temporară*  $\mathbf{M}_t$ . Corpurile care prezintă o magnetizare chiar și în lipsa unui câmp magnetic produs din exteriorul lor, sau care aduse într-un câmp magnetic păstrează o magnetizare după suprimarea câmpului exterior, se numesc cu *magnetizare permanentă*. Mărimile care caracterizează starea lor de magnetizare sunt *momentul magnetic permanent*  $\mathbf{m}_p$  și *magnetizația permanentă*  $\mathbf{M}_p$ .

În general, momentul magnetic  $\mathbf{m}$  al unui corp magnetizat este egal cu suma dintre o componentă temporară  $\mathbf{m}_t$  și o componentă permanentă  $\mathbf{m}_p$ ,

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_t(\mathbf{B}_v) + \mathbf{m}_p . \quad (4.140)$$

Relației (4.140) îi corespunde relația similară pentru magnetizații:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_t(\mathbf{H}) + \mathbf{M}_p , \quad (4.141)$$

unde  $\mathbf{H}$  este intensitatea câmpului magnetic în corpuri (v. par. 4.7).

Pentru un magnet permanent situat în câmp magnetic exterior slab, componenta temporară a momentului lui magnetic este neglijabilă și el este caracterizat numai de componenta permanentă  $\mathbf{m}_p$ . Un magnet permanent având formă cilindrică cu axa de magnetizare longitudinală, utilizat ca *ac magnetic*, introdus în câmp magnetic indică direcția locală și sensul inducției magnetice  $\mathbf{B}_v$ .

În câmpul magnetic terestru, acul magnetic se orientează cu extremitățile către polii magnetici geografici: extremitatea către polul nord geografic se numește pol nord al acului magnetic, respectiv cealaltă extremitate, polul sud. În acest sens, porțiunile de pe suprafața corpurilor magnetizate în care liniile magnetizației  $\mathbf{M}$  se termină, respectiv încep, sunt de polaritate nord, respectiv sud. În figura 4.20 este reprezentată o sferă uniform magnetizată cu polaritățile N și S corespunzătoare celor două emisfere în care se termină, respectiv încep liniile magnetizației.

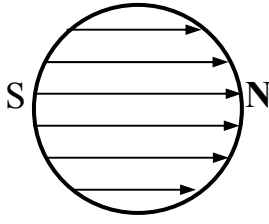


Fig. 4.20

Magnetizația este o mărime derivată și în sistemul de unități S.I., unitatea de magnetizație se numește *amper pe metru*  $\left(\frac{\text{A}}{\text{m}}\right)$ .

#### 4.6. MODELUL AMPERIAN AL CORPURILOR MAGNETIZATE

Unui corp magnetizat  $i$  se poate asocia o repartiție fictivă de curent electric, echivalentă atât din punctul de vedere al acțiunilor ponderomotoare exercitate de un câmp magnetic din exterior, cât și din punctul de vedere al producerii de câmp magnetic.

##### 4.6.1. Bucla elementară de curent

Un conductor filiform parcurs de curent, formând o curbă închisă  $\Gamma$  de arie plană foarte mică (fig. 4.21) se numește *bucă elementară de curent*.

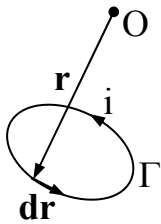


Fig. 4.21

**Acțiunile ponderomotoare asupra buclei de curent în câmp magnetic uniform.** Forța magnetică  $F_{\text{mb}}$  asupra buclei de curent se calculează cu relația (4.10):

$$\mathbf{F}_{\text{mb}} = i \oint_{\Gamma} \mathbf{dr} \times \mathbf{B}_v = i \left( \oint_{\Gamma} \mathbf{dr} \right) \times \mathbf{B}_v. \quad (4.142)$$

Ținând seama de relația  $\oint_{\Gamma} \mathbf{dr} = 0$ , rezultă că în câmp magnetic uniform forța care acționează asupra unei bucle elementare de curent este nulă:

$$\mathbf{F}_{\text{mb}} = 0. \quad (4.143)$$

În raport cu un punct oarecare O, cuplul elementar  $d\mathbf{C}_b$  al forței elementare  $d\mathbf{F}_m = i \mathbf{dr} \times \mathbf{B}_v$  are expresia:

$$d\mathbf{C}_b = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_m = i \mathbf{r} \times (\mathbf{dr} \times \mathbf{B}_v) = i \mathbf{dr} (\mathbf{B}_v \cdot \mathbf{r}) - i \mathbf{B}_v (\mathbf{r} \cdot \mathbf{dr}). \quad (4.144)$$

Integrând, se obține:

$$\mathbf{C}_b = i \oint_{\Gamma} (\mathbf{B}_v \mathbf{r}) d\mathbf{r} - i \oint_{\Gamma} \mathbf{B}_v (\mathbf{r} d\mathbf{r}), \quad (4.145)$$

unde  $i \oint_{\Gamma} \mathbf{B}_v (\mathbf{r} d\mathbf{r}) = i \mathbf{B}_v \oint_{\Gamma} d\left(\frac{r^2}{2}\right) = 0$ , deoarece vectorul  $\mathbf{B}_v$  este constant și integrala curbilinie a unei diferențiale totale este nulă.

Ținând seama de relațiile:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \iint_{S_{\Gamma}} d\mathbf{A} \times \text{grad } F, \quad F = \mathbf{B}_v \mathbf{r}; \quad (4.146)$$

$$\text{grad}(\mathbf{B}_v \mathbf{r}) = (\mathbf{B}_v \text{grad}) \mathbf{r} + (\mathbf{r} \text{grad}) \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_v \times \text{rot } \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \text{rot } \mathbf{B}_v, \quad (4.147)$$

expresia cuplului devine:

$$\mathbf{C}_b = i \oint_{\Gamma} (\mathbf{B}_v \mathbf{r}) d\mathbf{r} = i \iint_{S_{\Gamma}} d\mathbf{A} \times \text{grad}(\mathbf{B}_v \mathbf{r}) = i \iint_{S_{\Gamma}} d\mathbf{A} \times \mathbf{B}_v = i \left[ \iint_{S_{\Gamma}} d\mathbf{A} \right] \times \mathbf{B}_v. \quad (4.148)$$

Deoarece  $\iint_{S_{\Gamma}} d\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\Gamma} = A_{\Gamma} \mathbf{n}$ , rezultă:

$$\mathbf{C}_b = i \mathbf{A}_{\Gamma} \times \mathbf{B}_v. \quad (4.149)$$

În relația (4.149)  $\mathbf{A}_{\Gamma}$  este vectorul arie al buclei de curent, iar  $\mathbf{n}$  este versorul normalei pozitive, al cărui sens se stabilește după regula burghiului drept în raport cu sensul curentului.

Mărimea vectorială egală cu produsul dintre intensitatea curentului  $i$  și vectorul arie  $\mathbf{A}_{\Gamma}$  al buclei de curent se numește *moment magnetic al buclei elementare de curent*  $\mathbf{m}_b$ :

$$\mathbf{m}_b = i \mathbf{A}_{\Gamma}. \quad (4.150)$$

Prin urmare, relația (4.149) devine:

$$\mathbf{C}_b = \mathbf{m}_b \times \mathbf{B}_v. \quad (4.151)$$

**Acțiunile ponderomotoare asupra buclei de curent în câmp magnetic neuniform.** Lucrul mecanic elementar  $dL_m$  efectuat prin deplasarea elementară  $d\mathbf{s}$  a buclei de curent sub acțiunea forței magnetice  $\mathbf{F}_{mb}$  (4.10) este:

$$dL_m = \mathbf{F}_{mb} d\mathbf{s} = i d\mathbf{s} \oint_{\Gamma} d\mathbf{r} \times \mathbf{B}_v = i \oint_{\Gamma} (\mathbf{B}_v \times d\mathbf{s}) d\mathbf{r} = i \iint_{S_{\Gamma}} \text{rot}(\mathbf{B}_v \times d\mathbf{s}) d\mathbf{A}. \quad (4.152)$$

Ținând seama de relația  $\text{rot}(\mathbf{B}_v \times d\mathbf{s}) = (d\mathbf{s} \text{grad}) \mathbf{B}_v - d\mathbf{s} \text{div} \mathbf{B}_v$ , și deoarece  $\text{div} \mathbf{B}_v = 0$  (4.90), relația (4.152) devine:

$$dL_m = i \iint_{S_{\Gamma}} [(d\mathbf{s} \text{grad}) \mathbf{B}_v] d\mathbf{A} = [(d\mathbf{s} \text{grad}) \mathbf{B}_v] \iint_{S_{\Gamma}} i d\mathbf{A} =$$

$$= [(\mathbf{ds} \text{ grad}) \mathbf{B}_v] \mathbf{m}_b = \mathbf{ds} [(\mathbf{m}_b \text{ grad}) \mathbf{B}_v] = \mathbf{ds} \text{ grad} \left( \mathbf{m}_b \mathbf{B}_v \right), \quad (4.153)$$

unde săgeata  $\downarrow$  indică mărimea care se derivează. Identificând relațiile (4.152) și (4.154) se obține expresia forței magnetice care se exercită asupra buclei de curent în câmp magnetic neuniform:

$$\mathbf{F}_{mb} = \text{grad} \left( \mathbf{m}_b \mathbf{B}_v \right). \quad (4.154)$$

Prin urmare, în câmp magnetic neomogen asupra buclei acționează un cuplu (4.151) și o forță (4.154).

**Câmpul magnetic al buclei de curent.** Inducția magnetică în vid  $\mathbf{B}_v$  a unei bucle de curent se calculează cu relația (4.106):

$$\mathbf{B}_v = \mu_0 \mathbf{H}_v = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \text{grad} \iint_{S_\Gamma} \frac{\mathbf{r} d\mathbf{A}}{r^3}. \quad (4.155)$$

Deoarece dimensiunile suprafeței buclei sunt mult mai mici decât distanța  $\mathbf{r}$  până la punctul în care se calculează câmpul, relația (4.155) se poate scrie sub forma :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_v &= -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \text{grad} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \iint_{S_\Gamma} d\mathbf{A} \right) = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \text{grad} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \iint_{S_\Gamma} d\mathbf{A} \right) = \\ &= -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \text{grad} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \mathbf{A}_\Gamma \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} i \mathbf{A}_\Gamma \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \frac{\mathbf{r} \mathbf{m}_b}{r^3}. \end{aligned} \quad (4.156)$$

Mărimea scalară  $V_b$ ,

$$V_b = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m}_b \mathbf{r}}{r^3} \quad (4.157)$$

este *potențialul magnetic scalar al buclei elementare de curent*.

Prin urmare, inducția magnetică în vid  $\mathbf{B}_v$  și intensitatea câmpului magnetic în vid  $\mathbf{H}_v$  a buclei elementare de curent se calculează cu relațiile:

$$\mathbf{B}_v = -\mu_0 \text{grad} V_b; \quad \mathbf{H}_v = -\text{grad} V_b. \quad (4.158)$$

#### 4.6.2. Teorema echivalenței dintre un mic corp magnetizat și o buclă elementară de curent

*Un mic corp magnetizat și o buclă elementară de curent având momentele  $\mathbf{m}$  și  $\mathbf{m}_b$  egale,*

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_b, \quad (4.159)$$



sunt echivalente atât din punctul de vedere al acțiunilor ponderomotoare care se exercită asupra lor dacă sunt situate în câmp magnetic exterior, cât și al câmpului magnetic pe care îl produc în vidul din exteriorul lor.

În câmp magnetic uniform se exercită asupra micului corp magnetizat de moment  $\mathbf{m}$  un cuplu  $\mathbf{C}_m$ , iar în câmp neuniform se exercită și o forță  $\mathbf{F}_m$ , care se calculează cu relațiile (4.135), respectiv (4.136) :

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_v ; \mathbf{F}_m = \text{grad} \left( \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_v \right) = (\mathbf{m} \text{ grad}) \mathbf{B}_v . \quad (4.160)$$

Conform relațiilor (5.82) și (5.85), acțiunile ponderomotoare la care este supusă bucla de curent sunt:

$$\mathbf{C}_b = \mathbf{m}_b \times \mathbf{B}_v ; \mathbf{F}_{mb} = \text{grad} \left( \mathbf{m}_b \cdot \mathbf{B}_v \right) = (\mathbf{m}_b \text{ grad}) \mathbf{B}_v . \quad (4.161)$$

Ținând seama de relația (4.159), rezultă:

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{C}_b ; \mathbf{F}_m = \mathbf{F}_{mb} , \quad (4.162)$$

ceea ce demonstrează echivalența din punctul de vedere al acțiunilor ponderomotoare.

Se consideră cazul particular al introducerii corpului magnetizat, respectiv

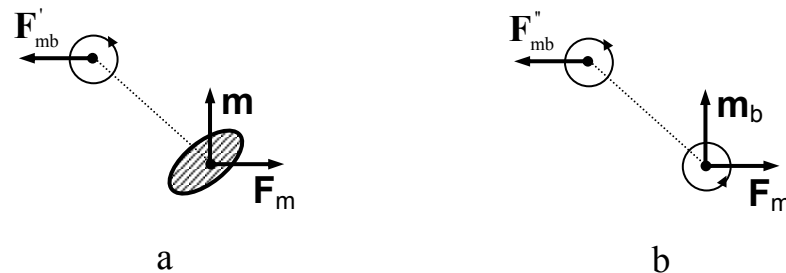


Fig. 4.22

buclei elementare de curent, în câmpul de inducție magnetică  $\mathbf{B}_v$  al unei bucle de curent (fig. 4.22). În cele două cazuri (fig. 4.22, a și b), asupra buclei de curent se exercită forțele:

$$\mathbf{F}'_{mb} = \text{grad} \left( \mathbf{m}_b \cdot \mathbf{B}_{vm} \right) ; \mathbf{F}''_{mb} = \text{grad} \left( \mathbf{m}_b \cdot \mathbf{B}_{vb} \right) , \quad (4.163)$$

unde  $\mathbf{B}_{vm}$  este inducția magnetică produsă în vid de micul corp magnetizat, iar  $\mathbf{B}_{vb}$  este inducția magnetică produsă în vid de bucla elementară de curent.

În câmpul magnetic de inducție  $\mathbf{B}_v$  produs de bucla de curent, asupra micului corp magnetizat, respectiv asupra buclei elementare, se exercită forțele:

$$\mathbf{F}_m = \text{grad} \left( \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_v \right) ; \mathbf{F}_{mb} = \text{grad} \left( \mathbf{m}_b \cdot \mathbf{B}_v \right) . \quad (4.164)$$

Conform principiului acțiunii și reacțiunii,  $\mathbf{F}'_{mb} = \mathbf{F}_m$ ,  $\mathbf{F}''_{mb} = \mathbf{F}_{mb}$  și ținând seama de (4.159), rezultă:

$$\mathbf{F}'_{mb} = \mathbf{F}''_{mb}, \quad (4.165)$$

sau

$$\mathbf{B}_{vm} = \mathbf{B}_{vb}, \quad (4.166)$$

ceea ce demonstrează și a doua parte a teoremei.

Teorema de echivalență este utilă în tratarea câmpului magnetic în corpuri; un corp masiv magnetizat poate fi divizat în mici corpuri magnetizate, iar acestea la rândul lor pot fi substituite prin bucle de curent echivalente. Deci problema câmpului poate fi tratată ca și cum aceasta ar fi în vid.

### 4.6.3. Curentul electric amperian

Deoarece un mic corp magnetizat poate fi înlocuit cu o buclă elementară de curent (fig. 4.23, a), fiecărei porțiuni elementare a unui corp finit magnetizat i se

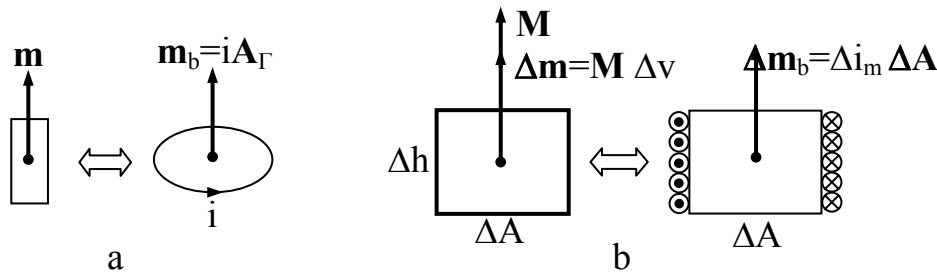


Fig. 4.23

poate substitui un sistem de bucle de curent parcurse de curenți numiți *amperieni* sau *moleculari*. Unui fragment de corp magnetizat de forma unei prisme având baza  $\Delta A$  și înălțimea  $\Delta h$  cu magnetizația  $\mathbf{M}$  orientată normal pe  $\Delta A$  (fig. 4.23, b) cu momentul magnetic elementar  $\Delta \mathbf{m}$

$$\Delta \mathbf{m} = \mathbf{M} \Delta v = \mathbf{M}(\Delta A \Delta h) = (\mathbf{M} \Delta h) \Delta A \quad (4.167)$$

i se asociază bucla elementară de curent, de arie  $\Delta A$  și curent amperian elementar  $\Delta i_m$ , cu momentul buclei:

$$\Delta \mathbf{m}_b = \Delta i_m \Delta A. \quad (4.168)$$

Identificând expresiile momentelor magnetice  $\Delta \mathbf{m}$  și  $\Delta \mathbf{m}_b$  rezultă:

$$(\mathbf{M} \Delta h) \Delta A = \Delta i_m \Delta A, \quad (4.169)$$

respectiv la limită:

$$di_m = \mathbf{M} dh. \quad (4.170)$$

În regim staționar, orice corp magnetizat poate fi înlocuit din punctul de vedere al câmpului magnetic produs, cu o repartiție fictivă de curent amperian, încât fiecărei prisme elementare de înălțime  $dh$  i se asociază o buclă elementară al cărei curent amperian  $di_m$  este dat de relația (4.170).

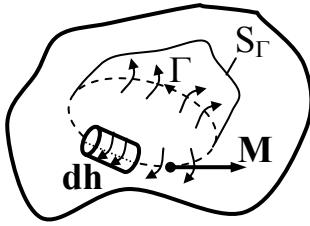


Fig. 4.24

Se consideră o suprafață deschisă  $S_\Gamma$  trasată în interiorul unui corp masiv magnetizat (fig. 4.24). Se fragmentează corpul masiv în prisme elementare ale căror muchii  $dh$  sunt tangente curbei  $\Gamma$ , iar fiecărei prisme îi corespunde curentul amperian elementar  $di_m$  dat de relația (4.170). Prin integrare, se obține:

$$i_{mS_\Gamma} = \oint_{\Gamma} \mathbf{M} d\mathbf{h}, \quad (4.171)$$

adică, intensitatea curentului amperian prin suprafața  $S_\Gamma$  este egală cu circulația magnetizației  $\mathbf{M}$  în lungul curbei  $\Gamma$ . Transformând integrala de linie într-o integrală



Fig. 4.25

de suprafață, se obține:

$$i_{mS_\Gamma} = \iint_{S_\Gamma} \text{rot } \mathbf{M} d\mathbf{A} = \iint_{S_\Gamma} \mathbf{J}_m d\mathbf{A}, \quad (4.172)$$

adică densitatea curentului amperian  $\mathbf{J}_m$  este egală cu rotorul magnetizației  $\mathbf{M}$ ,

$$\mathbf{J}_m = \text{rot } \mathbf{M}. \quad (4.173)$$

În corpurile omogen magnetizate  $\mathbf{M} = \text{const.}$  și deci  $\mathbf{J}_m = 0$ .

Relația (4.173) este valabilă numai în domeniile în care magnetizația  $\mathbf{M}$  este funcție continuă de punct. Fie  $S_d$  o suprafață de discontinuitate a magnetizației care separă două domenii în care magnetizațiile  $\mathbf{M}_1$  și  $\mathbf{M}_2$  sunt funcții continue (fig. 4.25, a). În punctele situate pe suprafața  $S_d$  curenții amperieni se repartizează sub forma unei pânze de curent amperian și în relația (4.173) în locul rotorului de volum intervine rotorul superficial:

$$\mathbf{J}_{lm} = \text{rot}_s \mathbf{M} = \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1). \quad (4.174)$$

La suprafața de separație a unui corp magnetizat, magnetizația în vidul din exteriorul acestuia fiind nulă (fig. 4.25, b), rezultă:

$$\mathbf{J}_{lm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad (4.175)$$

unde  $\mathbf{n}$  este versorul orientat din interiorul corpului spre exterior.

#### 4.6.4. Câmpul magnetic al corpurilor magnetizate

În conformitate cu teorema de echivalență (v. par. 4.6.2), câmpul unui mic corp magnetizat de moment magnetic  $\mathbf{m}$  se calculează cu relația (4.156) în care  $\mathbf{m}_b = \mathbf{m}$ :

$$\mathbf{B}_v = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \text{ grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.176)$$

Pentru un corp masiv magnetizat în care magnetizația este funcție continuă de punct, inducția magnetică elementară  $d\mathbf{B}_v$  stabilită de elementul de volum  $dv$  al cărui moment elementar este  $d\mathbf{m} = \mathbf{M} dv$ , se determină cu relația (4.176):

$$d\mathbf{B}_v = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{M} \text{ grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv. \quad (4.177)$$

Prin integrare, se obține:

$$\mathbf{B}_v = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v (\mathbf{M} \text{ grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv. \quad (4.178)$$

### 4.7. INDUCȚIA MAGNETICĂ ȘI INTENSITATEA CÂMPULUI MAGNETIC ÎN CORPURI

Fie o bobină cu  $N$  spire, parcursă de curentul  $i$ , în interiorul căreia este introdus un corp (fig. 4.26). Sub acțiunea câmpului magnetic produs de curentul  $i$  în bobină, corpul se magnetizează. Corpul magnetizat se substituie printr-un sistem de bucle de curent parcurse de curenți amperieni. Deci problema câmpului poate fi tratată ca și cum aceasta ar fi în vid. Ca urmare, se poate aplica teorema lui

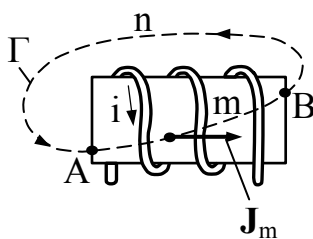


Fig. 4.26

Ampère. În acest sens, se consideră o curbă închisă  $\Gamma$  care înlănțuie toate spirele bobinei și se închide prin vid. Sensul de parcurgere al curbei  $\Gamma$  se asociază după regula burghiului drept cu sensul curentului în bobină. Dacă  $S_\Gamma$  este o suprafață deschisă care se sprijină pe curba  $\Gamma$ , curentul total pe care îl înlănțuie curba  $\Gamma$  este egal cu suma dintre solenația bobinei  $Ni$  și intensitatea curentului amperian  $i_{mS_\Gamma}$ . Prin urmare, teorema lui

Ampère (4.134) se scrie sub forma:

$$\oint_\Gamma \mathbf{B} ds = \mu_0 Ni + \mu_0 i_{mS_\Gamma}, \quad (4.179)$$

unde  $\mathbf{B}$  este inducția magnetică în interiorul corpului.

Înlocuind în relația (4.179) intensitatea curentului amperian  $i_{mS_\Gamma}$  cu expresia (4.171), se obține :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \, ds = \mu_0 Ni + \mu_0 \oint_{\Gamma} \mathbf{M} \, ds , \quad (4.180)$$

respectiv,

$$\oint_{\Gamma} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) ds = Ni . \quad (4.181)$$

Mărimea vectorială din paranteza de sub semnul integral se notează cu  $\mathbf{H}$  și se numește *intensitatea câmpului magnetic în interiorul corpului*:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} , \quad (4.182)$$

Din (4.182) rezultă relația de legătură dintre inducția magnetică  $\mathbf{B}$ , intensitatea câmpului magnetic  $\mathbf{H}$  și magnetizația  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) . \quad (4.182)$$

Un material magnetic este izotrop dacă sub acțiunea unui câmp magnetic având orice orientare în corp se magnetizează temporar în direcția câmpului și este liniar dacă local magnetizația temporară  $\mathbf{M}_t$  este proporțională cu intensitatea câmpului magnetic  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{M}_t = \chi_m \cdot \mathbf{H} , \quad (4.183)$$

unde mărimea adimensională  $\chi_m$  se numește *susceptivitate magnetică*.

Dacă materialul este fără magnetizației permanente,  $\mathbf{M}_p = 0$ , relația dintre  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  și  $\mathbf{M}$  (4.183) devine:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}_t) = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} , \quad (4.184)$$

unde mărimea adimensională :

$$1 + \chi_m = \mu_r \quad (4.185)$$

se numește *permeabilitate relativă* a materialului.

Rezultă:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} , \quad (4.186)$$

unde  $\mu = \mu_0 \mu_r$  este *permeabilitatea absolută* a materialului.

*Observații.*

a. Magnetizația  $\mathbf{M}$  este o mărime care caracterizează corpul și dacă se presupune dată, ar rezulta că inducția  $\mathbf{B}$  nu este independentă deoarece se exprimă printr-o relație liniară,  $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ , în funcție de  $\mathbf{H}$  și  $\mathbf{M}$  și deci pentru caracterizarea câmpului magnetic în corpuri ar fi suficient numai  $\mathbf{H}$ . Deoarece

pentru corpurile cu magnetizație temporară vectorul  $\mathbf{M}_t$  este funcție de  $\mathbf{H}$  (4.183), relația (4.182) are forma:  $\mathbf{B}(\mathbf{H}) = \mu_0 [\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{H})]$  și deci pentru caracterizarea câmpului magnetic în corpuri sunt necesare două mărimi  $\mathbf{H}$  și  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ .

b. Mărimile  $\mathbf{H}$  și  $\mathbf{B}$  sunt mărimi derivate, iar din punctul de vedere al unităților de măsură sunt mărimi secundare. În sistemul de unități SI, unitatea lui  $\mathbf{H}$  este *amper pe metru* (A/m) și a lui  $\mathbf{B}$  este *tesla* (T).

#### 4.7.1. Teorema lui Ampère în corpuri

a. **Forma integrală a teoremei lui Ampère în corpuri.** Cu notația (4.182), relația (4.181) devine:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \, ds = Ni = \theta_{S_{\Gamma}} \quad (4.187)$$

și constituie *forma integrală a teoremei lui Ampère* în corpuri, valabilă în regim staționar și cvasistaționar în corpuri imobile: *integrala curbilinie a intensității câmpului magnetic în lungul unei curbe închise  $\Gamma$  trasată integral în corpuri, în parte în corpuri și în parte în vid, sau integral în vid este egală cu solenația prin orice suprafață  $S_{\Gamma}$ .*

b. **Forma locală a teoremei lui Ampère în corpuri.** Dacă curentul  $i$  este repartizat cu densitatea de volum  $\mathbf{J}$ , aplicând relației (4.187) teorema lui Stokes se obține:

$$\iint_{S_{\Gamma}} \text{rot} \mathbf{H} \, d\mathbf{A} = \iint_{S_{\Gamma}} \mathbf{J} \, d\mathbf{A}, \quad (4.188)$$

sau,

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (4.189)$$

Relația (4.189) constituie *forma locală sau diferențială a teoremei lui Ampère: rotorul intensității câmpului magnetic într-un punct din conductorul parcurs de curent electric este egal cu densitatea de volum a curentului electric de conducție,*

În punctele din exteriorul conductoarelor parcurse de curenți electrici, în care  $\mathbf{J} = 0$ ,  $\text{rot} \mathbf{H} = 0$  și deci  $\mathbf{H} = -\text{grad} V_m$  (vezi par.4.4.7).

Relația (4.189) este valabilă numai în domeniile în care intensitatea câmpului magnetic este funcție continuă de punct.

c. **Forma locală a teoremei lui Ampère pe suprafețe de discontinuitate.** Fie  $S_d$  o suprafață de discontinuitate a câmpului magnetic

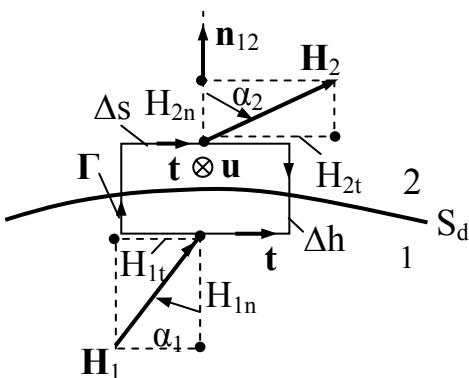


Fig. 4.27

care separă domeniile 1 și 2 și fie două puncte infinit apropiate de  $S_d$  în care intensitățile câmpului magnetic  $\mathbf{H}_1$  și  $\mathbf{H}_2$  sunt diferite (fig. 4.27). Se consideră conturul  $\Gamma$  de formă dreptunghiulară cu laturile  $\Delta s$  și  $\Delta h$ . Prin suprafața  $S_{\Gamma}$

solenajia  $\theta_{S_f}$  corespunde curentului electric de conducție repartizat cu densitatea pânzei de curent  $\mathbf{J}_1$ . Tensiunea magnetomotoare se calculează cu relația (4.187):

$$\mathbf{H}_2 \mathbf{t} \Delta s - \mathbf{H}_1 \mathbf{t} \Delta s = \mathbf{J}_1 \mathbf{t} \Delta s, \quad (4.190)$$

unde  $\mathbf{t}$  este versorul tangențial la  $S_d$ , iar  $\mathbf{n}$  este versorul normalei la suprafața  $S_f$ . La limită, pentru  $\Delta h \rightarrow 0$ , se obține:

$$H_{2t} - H_{1t} = J_1. \quad (4.191)$$

Pe suprafața de discontinuitate a câmpului magnetic care separă două medii imobile, diferența componentelor tangențiale ale intensităților câmpului magnetic este egală cu densitatea de suprafață a curentului electric de conducție.

Relația (4.191) reprezintă *forma locală a teoremei lui Ampère pe suprafețe de discontinuitate*.

Dacă  $\mathbf{J}_1 = 0$ , ecuația (4.191) devine:

$$H_{1t} = H_{2t}. \quad (4.192)$$

*Pe suprafața de discontinuitate a câmpului magnetic care separă două medii imobile pe care densitatea de curent este nulă, se conservă componentele tangențiale ale intensității câmpului magnetic.*

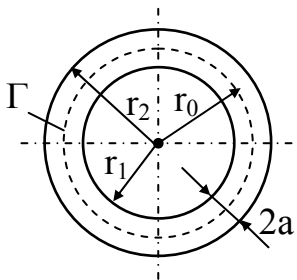


Fig. 4.28

*Câmpul magnetic al unei bobine toroidale parcursă de curentul  $i$ . Se consideră torul de secțiune circulară de rază  $a$ , diametru median  $2r_0$  și permeabilitate  $\mu$ , înfășurat uniform cu  $N$  spire parcurse de curentul  $i$  (fig. 4.28). Dacă  $a \ll r_0$ , câmpul magnetic stabilit de curentul  $i$  este localizat exclusiv în interiorul torului și se poate aproxima ca fiind uniform. Intensitatea câmpului magnetic în interiorul torului se calculează cu teorema*

lui Ampère aplicată cercului de rază  $r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2}$ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \mathbf{d}\mathbf{s} = Ni. \quad (4.193)$$

Deoarece  $\mathbf{H}$  și  $\mathbf{d}\mathbf{s}$  sunt coliniari, rezultă:

$$2\pi r_0 H_{\varphi} = Ni, \quad (4.194)$$

sau

$$H_{\varphi} = \frac{Ni}{2\pi r_0} = \frac{Ni}{l_{\text{med}}}, \quad (4.195)$$

unde  $l_{\text{med}} = 2\pi r_0$  este lungimea mediană a torului.

Câmpul magnetic al unui conductor cilindric circular de rază  $a$  parcurs de curentul de conducție  $i$  repartizat uniform cu densitatea de curent  $\mathbf{J} = \mathbf{u}_z \frac{i}{\pi a^2}$ .

Din motive de simetrie, liniile câmpului magnetic sunt cercuri concentrice cu axa cilindrului. Aplicând teorema lui Ampère pe un cerc  $\Gamma_i$  de rază  $r_i < a$  (fig. 4.29), se obține :

$$\oint_{\Gamma_i} \mathbf{H} \, ds = \iint_{S_{\Gamma_i}} \mathbf{J} \, d\mathbf{A}, \quad (4.196)$$

sau,

$$H_i 2\pi r_i = \frac{i}{\pi a^2} \pi r_i^2. \quad (4.197)$$

Din relația (4.197) rezultă intensitatea câmpului magnetic în interiorul conductorului:

$$H_i = \frac{i}{2\pi a^2} r_i. \quad (4.198)$$

Pentru un cerc  $\Gamma_e$  de rază  $r_e > a$  (fig. 4.29), se obține:

$$\oint_{\Gamma_e} \mathbf{H} \, ds = 2\pi r_e H_e = i, \quad (4.199)$$

sau,

$$H_e = \frac{i}{2\pi r_e}. \quad (4.200)$$

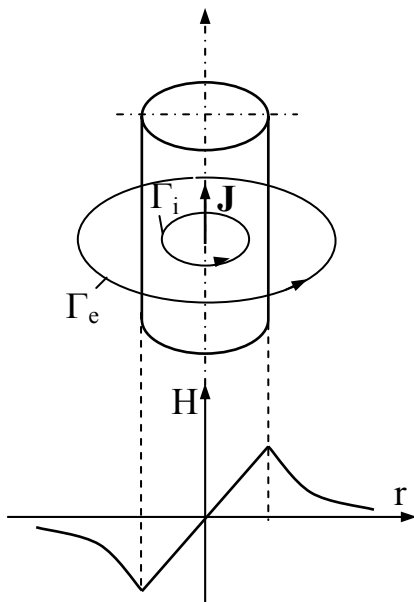


Fig. 4.29

Prin urmare, intensitatea câmpului magnetic este proporțională cu distanța  $r_i$  la axă în interiorul conductorului, invers proporțională cu distanța  $r_e$  în exteriorul acestuia și este maximă pe suprafața conductorului,

$$H_{r=a} = \frac{i}{2\pi a}. \quad (4.201)$$

## 4.7.2. Teorema fluxului magnetic în corpuri

**a. Forma locală a teoremei fluxului magnetic în corpuri.** Considerăm un conductor filiform rectiliniu și infinit lung parcurs de curentul electric  $i$  și situat într-un mediu având permeabilitatea  $\mu$  constantă (fig. 4.30). Aplicând teorema lui Ampère pe un cerc de rază  $r$  cu centrul pe conductor și ținând seama de relația (4.186), rezultă:



$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \, ds = \mu i, \quad (4.202)$$

sau,

$$\oint_{\Gamma} B_t \, ds = B_t \oint_{\Gamma} ds = B_t 2\pi r = \mu i. \quad (4.203)$$

Din relația (4.203) se obține:

$$B = B_t = \frac{\mu i}{2\pi r}, \quad (4.204)$$

sau vectorial

$$\mathbf{B} = \frac{\mu i}{2\pi r} \mathbf{u}_{\varphi} = B_{\varphi}(r) \mathbf{u}_{\varphi}. \quad (4.205)$$

Vectorul inducție magnetică  $\mathbf{B}$  este situat în plane transversale pe conductor, tangent la cercul de rază  $r$  cu centrul pe conductor și este orientat în sensul de rotație al burghiului drept care înaintează în sensul de referință al curentului  $i$  (fig. 4.30). La fel ca intensitatea câmpului electrostatic  $\mathbf{E}$  a firului rectiliniu uniform încărcat cu sarcină electrică, vectorul inducție magnetică  $\mathbf{B}$  este invers proporțional cu distanța  $r$  până la fir. Spre deosebire de liniile de câmp ale lui  $\mathbf{E}$ , care sunt radiale și deschise, liniile lui  $\mathbf{B}$  sunt circulare și închise (v. par. 4.4.3, a).

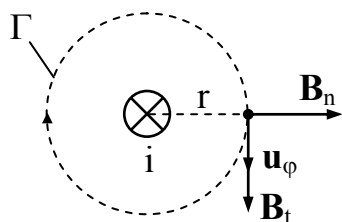


Fig. 4.30

Calculând divergența lui  $\mathbf{B}$ , rezultă:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (4.206)$$

Prin urmare, teorema fluxul magnetic în vid este valabilă și în interiorul corpurilor,

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4.207)$$

Deci, în fiecare punct din câmp, divergența inducției magnetice este identic nulă.

Deoarece divergența rotorului unui vector este identic nulă, din ecuația (4.207) rezultă că inducția magnetică în corpuri este rotorul unui vector  $\mathbf{A}$  numit *potențial magnetic vector*,

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (4.208)$$

Ținând seama de relația (4.208) și utilizând teorema lui Stokes, fluxul magnetic printr-o suprafață deschisă  $S_{\Gamma}$  care se sprijină pe curba închisă  $\Gamma$  se poate exprima prin relația:

$$\Phi_{S_r} = \iint_{S_r} \mathbf{B} \mathbf{n} dA = \iint_{S_r} \text{rot} \mathbf{A} \mathbf{n} dA = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (4.209)$$

**b. Forma integrală a teoremei fluxului magnetic în corpuri.** Pentru domeniile de variație spațială continuă a mărimilor, ținând seama de teorema divergenței, se obține:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{B} \mathbf{n} dA = 0. \quad (4.210)$$

*Fluxul magnetic printr-o suprafață închisă  $\Sigma$  trasată integral în corp, parțial în corp și parțial în vid, sau integral în vid este nul.*

Din teorema fluxului magnetic în corpuri rezultă concluziile prezentate la paragraful 4.4.6.

Relația (4.126) este valabilă numai în domeniile în care inducția magnetică este funcție continuă de punct.

**c. Forma locală a teoremei fluxului magnetic pe suprafețe de discontinuitate.** Fie  $S_d$  o suprafață de discontinuitate a inducției magnetice, care separă domeniile 1 și 2 în care inducțiile magnetice  $\mathbf{B}_1$  și  $\mathbf{B}_2$  sunt funcții continue de punct (fig. 4.31). Se consideră cilindrul elementar a cărui generatoare  $\Delta h$  este normală pe  $S_d$  și fie  $\mathbf{n}_1$  și  $\mathbf{n}_2$  versorii fețelor cilindrului orientați din interiorul

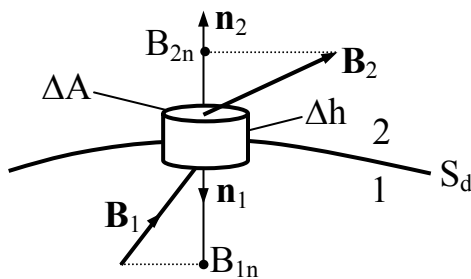


Fig. 4.31

acestui spre exterior. La limită,  $\Delta h \rightarrow 0$ , fluxul elementar corespunde numai celor două fețe de arii  $\Delta A$  și relația (4.210) devine:

$$(\mathbf{B}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{n}_2) \Delta A = 0, \quad (4.211)$$

respectiv,

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (4.212)$$

Deci, *pe suprafețe de discontinuitate a inducției magnetice, componentele ei normale*

*sunt egale (se conservă).*

În cazul mediilor liniare relația (4.212) se poate scrie și sub forma:

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}, \quad (4.213)$$

unde  $\mu_1$  și  $\mu_2$  sunt permeabilitățile celor două domenii separate de suprafața  $S_d$ .

### 4.7.3. Teorema refracției liniilor de câmp magnetic

Din relațiile (4.192) și (4.213) se obține:

$$\frac{\mu_1 H_{1n}}{H_{1t}} = \frac{\mu_2 H_{2n}}{H_{2t}}. \quad (4.214)$$

Deoarece  $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{H_{1t}}{H_{1n}}$  și  $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{H_{2t}}{H_{2n}}$ , relația (4.214) devine:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} \quad (4.215)$$

și reprezintă teorema refracției liniilor de câmp magnetic: *la trecerea dintr-un mediu cu permeabilitatea  $\mu_1$  într-un mediu cu permeabilitatea  $\mu_2$ , raportul tangentelor unghiurilor de incidență  $\alpha_1$  și de refracție  $\alpha_2$  este egal cu raportul permeabilităților.*

## 4.8. INDUCTIVITĂȚI

### 4.8.1. Inductivitatea proprie

Se consideră o spirală conductoare filiformă și nedeformabilă, de contur  $\Gamma$  parcursă de curent continuu sau cvasistacionar  $i$ , situată în mediu omogen, izotrop și liniar de permeabilitate constantă  $\mu$  (fig. 4.32). Raportul pozitiv dintre fluxul magnetic  $\Phi_{S_\Gamma}$  prin orice suprafață

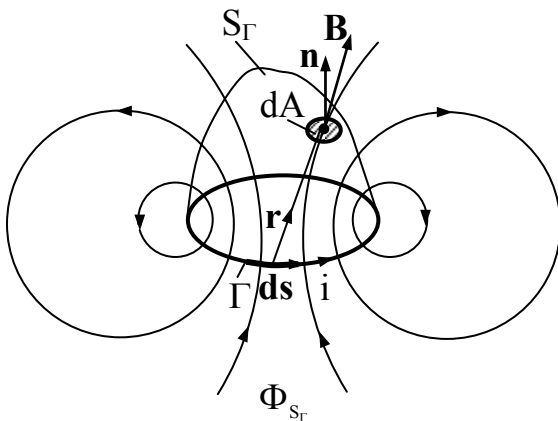


Fig. 4.32

deschisă  $S_\Gamma$  care se sprijină pe conturul interior  $\Gamma$  al spirei și curentul  $i$ , este independent de fluxul magnetic și de intensitatea curentului și se numește *inductivitate* sau *inductanță proprie*  $L$ ,

$$L = \frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{i} > 0. \quad (4.216)$$

Inducția magnetică într-un punct situat pe suprafața  $S_\Gamma$  se calculează cu relația Biot – Savart – Laplace (4.35),

$$\mathbf{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (4.217)$$

și fluxul magnetic  $\Phi_{S_\Gamma}$  prin suprafața deschisă  $S_\Gamma$  are expresia:

$$\Phi_{S_\Gamma} = \iint_{S_\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dA = \frac{\mu i}{4\pi} \iint_{S_\Gamma} \mathbf{n} \cdot dA \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.218)$$

Înlocuind expresia fluxului magnetic (4.218) în relația de definiție a inductivității proprii a spirei (4.216), se obține:

$$L = \frac{\Phi_{S_\Gamma}}{i} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{S_\Gamma} \mathbf{n} dA \oint_{\Gamma} \frac{\mathbf{ds} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.219)$$

Din relația (4.219) rezultă că inductivitatea proprie a spirei este independentă de fluxul magnetic  $\Phi_{S_\Gamma}$  și de curentul  $i$  și depinde de forma și dimensiunile spirei, respectiv de permeabilitatea  $\mu$ .

În cazul unei bobine cu  $N$  spire, suprafața care intervine în calculul fluxului magnetic  $\Phi_{S_\Gamma}$  este în general o suprafață elicoidală. Astfel, în figura 4.33, a este

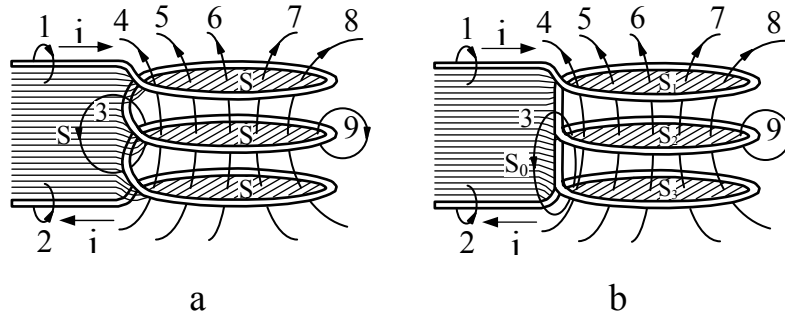


Fig. 4.33

hașurată suprafața limitată de un contur în formă de elice și care formează o bobină cu trei spire. Diferitele linii ale câmpului magnetic străbat această suprafață de mai multe ori: liniile 4, 5, 6, 7 și 8 de trei ori, iar linia 3 de două ori. Calculul fluxului magnetic printr-o astfel de suprafață este dificil. Dacă însă spirele bobinei aderă strâns una de alta, se poate utiliza o reprezentare simplificată. Astfel, se poate considera că fiecare spiră a bobinei este închisă (fig. 4.33, b). În acest caz, suprafața complexă  $S_\Gamma$  poate fi împărțită în mai multe suprafețe simple și anume suprafețele  $S_1, S_2$  și  $S_3$  limitate fiecare în parte de câte o spiră a bobinei și suprafața  $S_0$  limitată de conturul format de circuitul sursei de alimentare, de conductoarele de alimentare și de porțiunile de conductoare care leagă diferitele spire ale bobinei. Fluxul magnetic  $\Phi_{fS_\Gamma}$  referitor la o suprafață deschisă care se sprijină numai pe o spiră a bobinei se numește *flux magnetic fascicular*. Fluxul magnetic  $\Phi_{S_\Gamma}$  care străbate întreaga suprafață  $S_\Gamma = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$  limitată de conturul întregului circuit se numește *flux magnetic total* și este egal cu suma dintre fluxul magnetic  $\Phi_0$  care străbate suprafața  $S_0$  limitată de circuitul de alimentare și fluxurile fasciculare  $\Phi_{fS_1}, \Phi_{fS_2}, \Phi_{fS_3}$  care străbat suprafețele limitate de contururile celor trei spire ale bobinei:

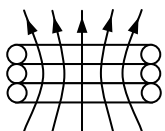


Fig. 4.34

Dacă dimensiunile secțiunii transversale ale conductorului bobinei sunt mult mai mici decât diametrul bobinei și spirele sunt dispuse strâns încât toate liniile inducției magnetice se închid prin toate spirele bobinei (fig. 4.34) și în plus se neglijează fluxul  $\Phi_0$ , se poate înlocui fluxul magnetic total  $\Phi_{S_\Gamma}$

$$\Phi_{S_\Gamma} = \Phi_0 + \Phi_{fS_1} + \Phi_{fS_2} + \Phi_{fS_3}. \quad (4.220)$$

prin produsul dintre numărul de spire și fluxul magnetic fascicular  $\Phi_{f_{S_\Gamma}}$  referitor la o spiră,

$$\Phi_{S_\Gamma} = N \Phi_{f_{S_\Gamma}}. \quad (2.221)$$

Fluxul magnetic fascicular  $\Phi_{f_{S_\Gamma}}$  este stabilit de inducția magnetică

$$\mathbf{B} = \frac{\mu N i}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\mathbf{ds} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (4.222)$$

și din expresia fluxului magnetic prin bobină,

$$\Phi = N \Phi_{f_{S_\Gamma}} = N \iint_{S_\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dA} = \frac{\mu N^2 i}{4\pi} \iint_{S_\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{dA} \oint_{\Gamma} \frac{\mathbf{ds} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (4.223)$$

se obține inductivitatea proprie a bobinei:

$$L = \frac{\mu N^2}{4\pi} \iint_{S_\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{dA} \oint_{\Gamma} \frac{\mathbf{ds} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.224)$$

Inductivitatea proprie definită cu ajutorul fluxului magnetic se referă exclusiv la domenii din exteriorul conductoarelor filiforme. În medii conductoare, această definiție nu poate fi utilizată deoarece nu este posibilă alegerea univocă a curbei prin care să se calculeze fluxul magnetic. Fluxul magnetic prin orice suprafață deschisă care se sprijină pe conturul exterior al spirei parcurse de curentul  $i$  (fig. 4.35), este egal cu suma a două fluxuri:

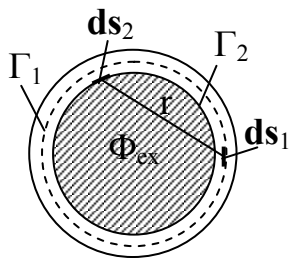


Fig. 4.35

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_i, \quad (4.225)$$

unde  $\Phi_e$  este fluxul magnetic exterior care străbate suprafața hașurată în figura, limitată de conturul interior  $\Gamma_2$  al spirei, iar  $\Phi_i$  este fluxul magnetic interior ale cărui linii trec prin corpul conductor. Conductorul formând o singură spiră, fiecare linie a fluxului magnetic exterior îmbrățișează o singură dată conductorul, prin urmare,

$$\Phi_{S_{\Gamma_2}} = \Phi_e = \iint_{S_{\Gamma_2}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{dA}_2 = \iint_{S_{\Gamma_2}} \text{rot} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{dA}_2 = \oint_{\Gamma_2} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{ds}_2, \quad (4.226)$$

unde  $\mathbf{A}_1$  este potențialul magnetic vector într-un punct situat pe conturul  $\Gamma_2$  și are următoarea expresie:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{ds}_1}{r}. \quad (4.227)$$

Înlocuind relația (4.227) în expresia fluxului magnetic (4.226) și ținând seama de definiția (4.216) se obține expresia inductivității proprii exterioare  $L_e$ :

$$L_e = \frac{\Phi_e}{i} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{\mathbf{ds}_1 \mathbf{ds}_2}{r}. \quad (4.228)$$

Pentru o bobină cu  $N$  spire, se obține:

$$L_e = \frac{\mu N^2}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{\mathbf{ds}_1 \mathbf{ds}_2}{r}. \quad (4.229)$$

Inductivitatea proprie interioară  $L_i$  care corespunde câmpului magnetic din interiorul conductorului se definește cu ajutorul energiei magnetice (v. par. 5.3.4) și inductivitatea proprie a spirei este  $L = L_e + L_i$ .

În SI unitatea de inductivitate este numită *henry* (H) și este inductivitatea bobinei prin care curentul de un amper stabilește fluxul magnetic de un weber.

*a. Inductivitatea proprie a bobinei toroidale de secțiune circulară.* Utilizând relația (4.195) se obține inducția magnetică în interiorul torului:

$$B = \mu \frac{Ni}{l_{\text{med}}} \quad (4.230)$$

și fluxul magnetic fascicular prin secțiunea  $A = \pi a^2$  a torului,

$$\Phi_f = \iint_S \mathbf{B} \mathbf{dA} = B A = \mu \frac{Ni}{l_{\text{med}}} \pi a^2. \quad (4.231)$$

Inductivitatea proprie a bobinei se determină cu relația (4.216):

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{N\Phi_f}{i} = \mu N^2 \frac{\pi a^2}{l_{\text{med}}} = \mu N^2 \frac{A}{l_{\text{med}}} = \frac{N^2}{\frac{l_{\text{med}}}{\mu A}}. \quad (4.232)$$

Utilizând relația (4.61) se obține o expresie similară pentru inductivitatea proprie a unei bobine cilindrice foarte lungi,

$$L = \mu N^2 \frac{A}{\frac{\ell}{\mu A}}, \quad (4.233)$$

unde  $\ell$  este lungimea bobinei, iar  $A$  – aria secțiunii transversale.

*b. Inductivitatea proprie a bobinei toroidale de secțiune dreptunghiulară.* Se consideră o bobină cu  $N$  spire înfășurată pe un inel care are secțiunea transversală dreptunghiulară și este confecționat dintr-un material cu permeabilitatea magnetică constantă. Raza interioară a inelului este  $a$ , iar raza exterioară  $b$ . Înălțimea inelului

este  $h$  (fig. 4.36). Aplicând cercului de rază  $r$  teorema lui Ampère, se obține inducția magnetică în interiorul torului:

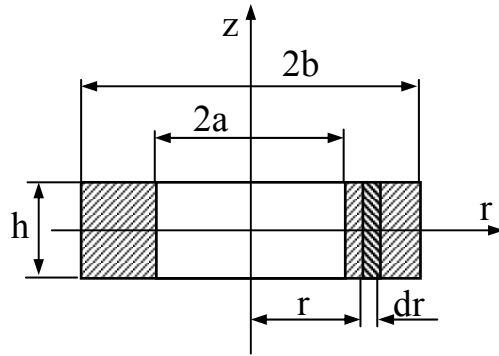


Fig. 4.36

$$B = \frac{\mu N i}{2 \pi r}. \quad (4.234)$$

Pentru a calcula fluxul fascicular  $\Phi_f$  prin secțiunea torului, aceasta se descompune în elemente de suprafață de forma unor fâșii foarte înguste, paralele cu axa de simetrie a torului, a căror arie este (fig. 4.36):

$$dA = h dr, \quad (4.235)$$

astfel încât:

$$\Phi_f = \iint_S \mathbf{B} d\mathbf{A} = \frac{\mu N i h}{2 \pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu N i h}{2 \pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (4.236)$$

Inductivitatea proprie a bobinei, conform definiției este:

$$L = \frac{N \Phi_f}{i} = \frac{\mu N^2 h}{2 \pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (4.237)$$

*c. Inductivitatea proprie a unei linii bifilare.* Se consideră o linie bifilară constituită din două fire cilindrice circulare de raze  $a$  și lungime  $\ell \gg a$ , dispuse paralel la distanța  $d$  (distanța dintre axele de simetrie ale conductoarelor) într-un mediu având permeabilitatea  $\mu$  (fig. 4.37). Presupunând linia dintr-un material neferomagnetic și  $a \ll d$ , se va putea neglija fluxul magnetic din interiorul conductoarelor.

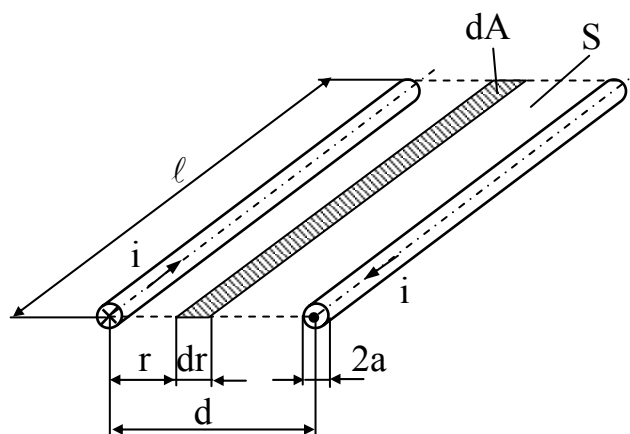


Fig. 4.37

Inducțiile magnetice stabilite de curenții din cele două conductoare, într-un punct situat între cele două conductoare la distanța  $r$  de conductorul din stânga, sunt (4.41):

$$B_1 = \frac{\mu i}{2\pi r}; B_2 = \frac{\mu i}{2\pi(d-r)}, \quad (4.238)$$

unde  $B_1$  este inducția produsă de curentul din conductorul din stânga, iar  $B_2$  este inducția produsă de conductorul din dreapta. Inducția rezultantă în punctul considerat va fi :

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu i}{2\pi r} + \frac{\mu i}{2\pi(d-r)} = \frac{\mu i}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right). \quad (4.239)$$

Fluxul magnetic prin suprafața  $S$  dintre conductoare, pe o porțiune de linie de lungime  $\ell$ , este:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \mathbf{B} d\mathbf{A} = \frac{\mu i \ell}{2\pi} \left[ \int_a^{d-a} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right) dr \right] = \frac{\mu i \ell}{2\pi} \left[ \ln r - \ln(d-r) \right]_a^{d-a} = \\ &= \frac{\mu i \ell}{2\pi} \left[ \ln \frac{r}{d-r} \right]_a^{d-a} = \frac{\mu i \ell}{2\pi} \left( \ln \frac{d-a}{a} - \ln \frac{a}{d-a} \right) = \frac{\mu i \ell}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \cong \frac{\mu i \ell}{\pi} \ln \frac{d}{a}. \end{aligned} \quad (4.240)$$

Utilizând relația de definiție (4.216) se determină inductivitatea proprie a liniei bifilare:

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu \ell}{\pi} \ln \frac{d}{a}, \quad (4.241)$$

iar inductivitatea pe unitatea de lungime va fi:

$$L_s = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{a}. \quad (4.242)$$

#### 4.8.2. Inductivitatea mutuală

Se consideră două bobine având spirele filiforme, nedeformabile, menținute în aceeași poziție relativă într-un mediu cu permeabilitatea  $\mu$  constantă (fig. 4.38). Presupunem că numai bobina (1) este parcursă de curent, având intensitatea  $i_1$ . În general, numai o parte din liniile de câmp ale fluxului magnetic fascicular propriu produs de bobina (1) înlănțuie și spirele bobinei (2); această parte se numește *flux magnetic fascicular util*. Partea care se închide direct prin aer și care nu înlănțuie bobina (2) se numește *flux de dispersie* sau *flux de scăpări*. Notând cu  $\Phi_{f11}$  fluxul fascicular propriu al bobinei (1), cu  $\Phi_{f21}$  fluxul fascicular produs de bobina (1) printr-o spirală a bobinei (2) și cu  $\Phi_{fd21}$  fluxul fascicular de dispersie al bobinei (1)

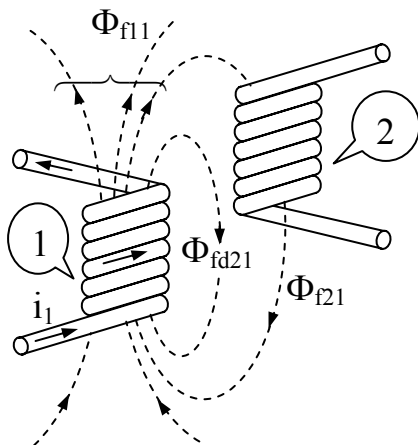


Fig. 4.38



față de bobina (2), rezultă:

$$\Phi_{f11} = |\Phi_{f21}| + \Phi_{fd21} \quad (4.243)$$

Dacă  $\Phi_{f21} \neq 0$ , se spune că bobinele (1) și (2) sunt *cuplate magnetic*.

Dacă se consideră că bobina (2) este parcursă de curent, având intensitatea  $i_2$ , rezultă:

$$\Phi_{f22} = |\Phi_{f12}| + \Phi_{fd12}, \quad (4.244)$$

unde:  $\Phi_{f22}$  este fluxul fascicular propriu al bobinei (2);  $\Phi_{f12}$  - fluxul fascicular produs de bobina (2) printr-o spiră a bobinei (1);  $\Phi_{fd12}$  - fluxul fascicular de dispersie al bobinei (2) față de bobina (1).

Raportul  $L_{21}$  dintre fluxul magnetic  $\Phi_{21}$  prin bobina (2) stabilit de curentul  $i_1$  care parcurge bobina (1) și curentul  $i_1$ , egal cu raportul  $L_{12}$  dintre fluxul magnetic  $\Phi_{12}$  prin bobina (1) stabilit de curentul  $i_2$  care parcurge bobina (2) și curentul  $i_2$  este independent de fluxurile *magnetice și de intensitățile curentilor și se numește inductivitate sau inductanță mutuală* între cele două bobine,

$$L_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{i_1} \Big|_{i_2=0} = L_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{i_2} \Big|_{i_1=0} \quad (4.245)$$

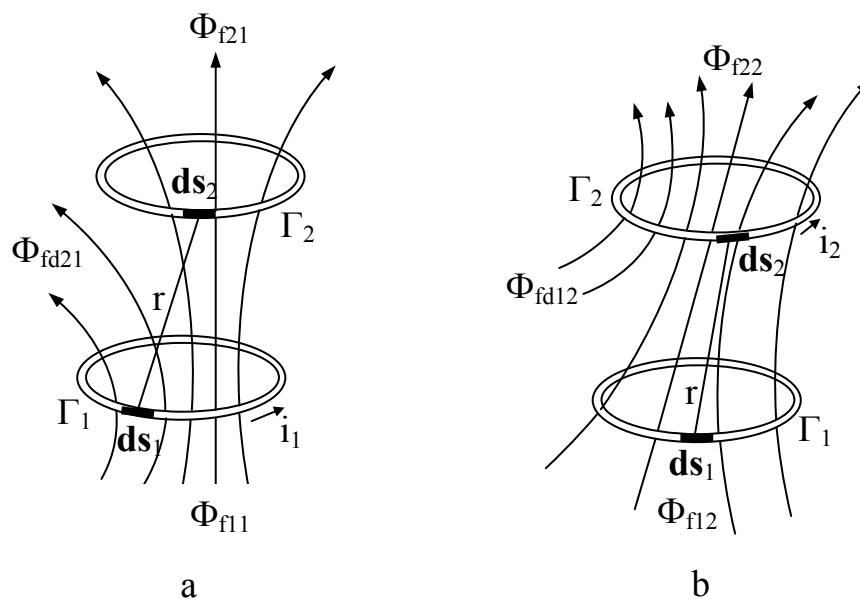


Fig. 4.39

Inductivitatea mutuală se mai notează și cu  $M = L_{21} = L_{12}$  și poate fi pozitivă,  $M > 0$  sau negativă,  $M < 0$ , după cum sensurile de referință ale conturilor bobinelor (1) și (2) sunt asociate după regula burghiului drept în același sens sau în sens opus.

Pentru calculul inductivității mutuale se consideră numai câte o spiră din fiecare bobină (fig. 4.39,a). Fluxul magnetic fascicular  $\Phi_{f21}$  prin bobina (2) stabilit de curentul  $i_1$  prin bobina (1) are expresia:

$$\Phi_{f_{21}} = \iint_{S_{\Gamma_2}} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_2 dA_2 = \iint_{S_{\Gamma_2}} \text{rot} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{n}_2 dA_2 = \oint_{\Gamma_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{s}_2, \quad (4.246)$$

unde  $\mathbf{A}_1$  este potențialul magnetic vector într-un punct situat pe conturul  $\Gamma_2$  și are următoarea expresie:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu N_1 i_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\mathbf{s}_1}{r}. \quad (4.247)$$

Înlocuind relația (4.247) în expresia fluxului magnetic fascicular (4.246) se obține fluxul magnetic total:

$$\Phi_{21} = N_2 \Phi_{f_{21}} = \frac{\mu N_1 N_2 i_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r} \quad (4.248)$$

și ținând seama de definiția (4.216) rezultă expresia inductivității mutuale  $L_{21}$ :

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu N_1 N_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r}. \quad (4.249)$$

Dacă se consideră că bobina (2) este parcursă de curentul  $i_2$  (fig. 4.39, b) se obține expresia  $L_{12}$  identică cu  $L_{21}$ :

$$L_{12} = L_{21} = M = \frac{\mu N_1 N_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r}. \quad (4.250)$$

Relația (4.250) constituie *formula lui Neumann pentru inductivități mutuale*. Dacă liniile de câmp ale inducției magnetice  $\mathbf{B}_1$  stabilită de curentul  $i_1$

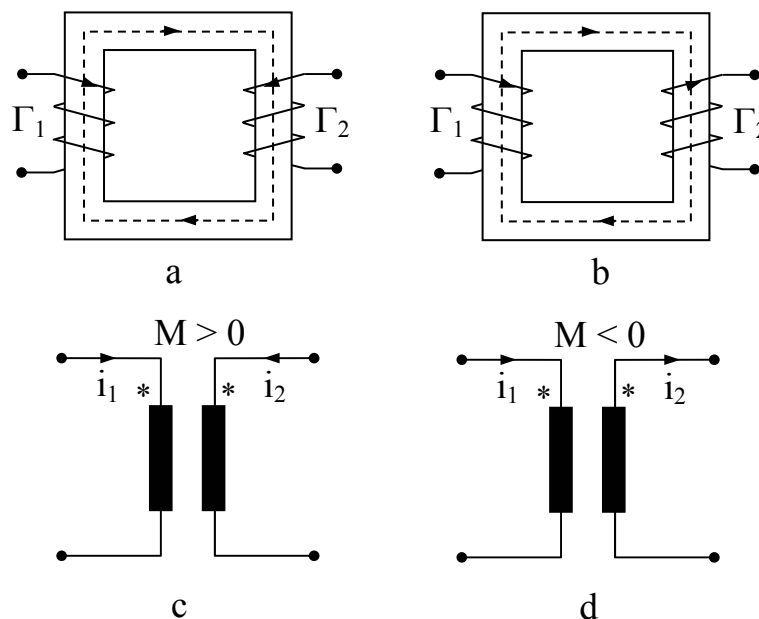


Fig. 4.40

înlănțuie spirele bobinei  $\Gamma_2$  în sensul de înaintare al burghiului drept care rotește în

sensul de referință al lui  $\Gamma_2$  (fig. 4.40, a), fluxul  $\Phi_{21}$  este pozitiv și deci inductivitatea mutuală este pozitivă,  $M > 0$ , iar în caz contrar (fig. 4.40, b) inductivitatea mutuală este negativă,  $M < 0$ . Pentru a reprezenta modul în care se introduce semnul inductivității mutuale, se indică cu stelute bornele polarizate ale celor două bobine, cu următoarea convenție: dacă sensurile de referință ale curenților  $i_1$  și  $i_2$  sunt identice față de bornele polarizate (fig. 4.40, c), inductivitatea mutuală este pozitivă, iar dacă sensurile curenților sunt diferite (fig. 4.40, d), inductivitatea mutuală este negativă.

În SI unitatea de inductivitate mutuală este aceeași cu a inductivității proprii, *henry* (H).

*a. Inductivitatea mutuală dintre două spire circulare, paralele și coaxiale.* Se consideră două spire circulare paralele și coaxiale de raze  $a_1$  și  $a_2$ , situate la distanța  $h$  una față de cealaltă (fig. 4.41). Fie  $i_1$  curentul care străbate spira de rază  $a_1$ . Potențialul magnetic vector stabilit de curentul  $i_1$  într-un punct P situat pe spira de rază  $a_2$  se calculează cu relația (4.88):

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{u}_\varphi \frac{\mu_0 i_1 a_1^2}{4r^2} \sin \beta. \quad (4.251)$$

Fluxul magnetic care străbate spira de rază  $a_2$  are expresia:

$$\Phi_{21} = \oint_{\Gamma_2} \mathbf{A}_1 \mathbf{d}\mathbf{s}_2 = \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_\varphi \frac{\mu_0 i_1 a_1^2}{4r^2} \sin \beta \mathbf{u}_\varphi a_2 d\varphi. \quad (4.252)$$

Deoarece  $\sin \beta = \frac{a_2}{r}$ , relația (4.251) devine:

$$\Phi_{21} = \oint_{\Gamma_2} \mathbf{A}_1 \mathbf{d}\mathbf{s}_2 = \frac{\mu_0 i_1 a_1^2 a_2^2}{4r^3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 \pi i_1 a_1^2 a_2^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 \pi i_1 a_1^2 a_2^2}{2(h^2 + a_1^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.253)$$

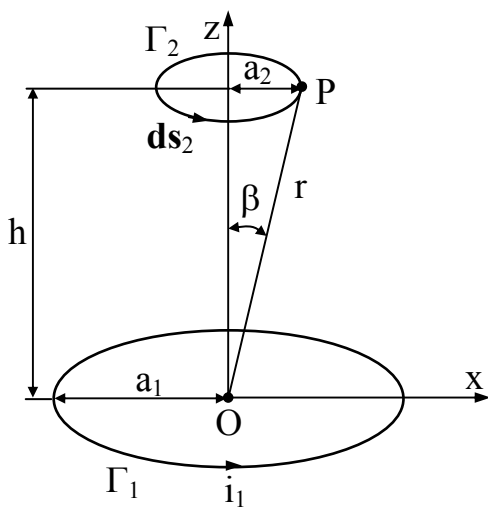


Fig. 4.41

Utilizând relația de definiție (4.245) se determină inductivitatea mutuală dintre cele două spire:

$$M = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0 \pi a_1^2 a_2^2}{2(h^2 + a_1^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.254)$$

În cazul a două bobine coaxiale cu  $N_1$  și  $N_2$  spire, fluxul fascicular prin bobina  $\Gamma_2$  stabilit de curentul  $i_1$  prin bobina  $\Gamma_1$  are expresia:

$$\Phi_{f21} = \frac{\mu_0 \pi N_1 i_1 a_1^2 a_2^2}{2(h^2 + a_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.255)$$

iar inductivitatea mutuală va fi:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 a_1^2 a_2^2}{2(h^2 + a_1^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.256)$$

#### 4.8.3. Relațiile lui Maxwell pentru inductivități

Se consideră două bobine cuplate magnetic având spirele filiforme, nedeformabile, menținute în aceeași poziție relativă într-un mediu cu permeabilitatea  $\mu$  constantă (fig. 4.39). Dacă  $i_1 \neq 0$  și  $i_2 = 0$  (fig. 4.39, a), fluxurile magnetice prin bobina (1) și prin bobina (2) produse de curentul  $i_1$  sunt:

$$\Phi_{11} = N_1 \Phi_{f11} = L_{11} i_1; \quad \Phi_{21} = N_2 \Phi_{f21} = L_{21} i_1. \quad (4.257)$$

Dacă  $i_1 = 0$  și  $i_2 \neq 0$  (fig. 4.39, b), fluxurile magnetice prin cele două bobine produse de curentul  $i_2$  sunt:

$$\Phi_{12} = N_1 \Phi_{f12} = L_{12} i_2; \quad \Phi_{22} = N_2 \Phi_{f22} = L_{22} i_2. \quad (4.258)$$

Dacă  $i_1 \neq 0$  și  $i_2 \neq 0$ , fluxurile totale prin cele două bobine se obțin aplicând principiul superpoziției:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_{11} i_1 + L_{12} i_2; \quad \Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} = L_{21} i_1 + L_{22} i_2, \quad (4.259)$$

unde:  $L_{11}$  este inductivitatea proprie a bobinei (1);  $L_{22}$  este inductivitatea proprie a bobinei (2);  $L_{12} = L_{21} = M$  este inductivitatea mutuală.

Sistemul de ecuații (4.259) se poate scrie sub formă matriceală:

$$[\Phi] = [L][i], \quad (4.260)$$

unde:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}; \quad [L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}; \quad [i] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}. \quad (4.261)$$

Dacă determinantul matricei  $[L]$  este nul,

$$\|[L]\| = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (4.262)$$

bobinele se numesc *perfect cuplate magnetic*.

Din relația (4.262) rezultă că bobinele sunt perfect cuplate magnetic dacă:

$$L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21} = 0, \quad (4.263)$$

sau

$$L_{12}L_{21} = M^2 = L_{11}L_{22}. \quad (4.264)$$

Prin urmare, cele două bobine sunt perfect cuplate magnetic dacă:

$$M = \sqrt{L_{11}L_{22}}. \quad (4.265)$$

În general, nu toate liniile de câmp ale uneia dintre bobine înlănțuie spirele celei de a doua bobine și relația (4.265) devine:

$$M = K\sqrt{L_{11}L_{22}}, \quad (4.266)$$

unde  $K \leq 1$  se numește *coeficient de cuplaj magnetic*.

Pentru un sistem format din de  $n$  circuite cuplate, relațiile (4.259) devin:

$$\begin{cases} \Phi_j = \sum_{k=1}^n \Phi_{jk} = \sum_{k=1}^n L_{jk}i_k = L_{j1}i_1 + L_{j2}i_2 + \dots + L_{jj}i_j + \dots + L_{jk}i_k + \dots + L_{jn}i_n; \\ j=1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (4.267)$$

Dacă minorii principali ai matricei  $[L]$  sunt nenuli, sistemul de ecuații (4.267) se poate scrie și sub forma:

$$\begin{cases} i_j = \Gamma_{j1}\Phi_1 + \Gamma_{j2}\Phi_2 + \dots + \Gamma_{jj}\Phi_j + \dots + \Gamma_{jk}\Phi_k + \dots + \Gamma_{jn}\Phi_n; \\ j=1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (4.268)$$

unde,

$$\Gamma_{jj} = \left. \frac{i_j}{\Phi_j} \right|_{\substack{\Phi_k=0 \\ k \neq j}} \quad (4.269)$$

este *inductivitatea reciprocă proprie* a bobinei  $j$ , iar

$$\Gamma_{jk} = \left. \frac{i_j}{\Phi_k} \right|_{\substack{\Phi_j=0 \\ k \neq j}} = \Gamma_{kj} = \left. \frac{i_k}{\Phi_j} \right|_{\substack{\Phi_k=0 \\ k \neq j}} \quad (4.270)$$

este *inductivitatea reciprocă mutuală* între bobinele  $j$  și  $k$ .

Relațiile (4.267) și (4.268) dintre fluxuri și curenți constituie *relațiile lui Maxwell pentru inductivități*.

#### 4.8.4. Inductivități utile și de dispersie

Din relația (4.243) rezultă fluxul fascicular de dispersie  $\Phi_{fd21}$  al bobinei (1) față de bobina (2):

$$\Phi_{fd21} = \Phi_{f11} - |\Phi_{f21}|. \quad (4.271)$$

Corespunzător fluxului de dispersie se definește *inductivitatea de dispersie a bobinei (1) față de bobina (2)*:

$$L_{d21} = \frac{d\Phi_{d21}}{i_1} = N_1 \frac{\Phi_{fd21}}{i_1}. \quad (4.272)$$

Înlocuind (4.271) în (4.272) se obține:

$$L_{d21} = N_1 \frac{\Phi_{f11}}{i_1} - N_1 \frac{|\Phi_{f21}|}{i_1}, \quad (4.273)$$

sau

$$L_{d21} = L_{11} - \frac{N_1}{N_2} |L_{21}|, \quad (4.274)$$

unde s-a ținut seama de relațiile (4.216) și (4.245):

$$L_{11} = \frac{dN_1\Phi_{f11}}{i_1}; \quad |L_{21}| = \frac{dN_2|\Phi_{f21}|}{i_1}. \quad (4.275)$$

Similar se definește *inductivitatea de dispersie a bobinei (2) față de bobina (1)*:

$$L_{d12} = L_{22} - \frac{N_2}{N_1} |L_{12}|. \quad (4.276)$$

În general,  $L_{d21} \neq L_{d12}$ .

Se definește *inductivitatea utilă a bobinei (1) față de bobina (2)*:

$$L_{u21} = \frac{N_1}{N_2} |L_{21}| > 0 \quad (4.277)$$

și analog *inductivitatea utilă a bobinei (2) față de bobina (1)*:

$$L_{u12} = \frac{N_2}{N_1} |L_{12}| > 0. \quad (4.278)$$

Prin urmare relațiile (4.274) și (4.276) se pot scrie sub forma:

$$L_{11} = L_{d21} + L_{u21}; \quad L_{22} = L_{d12} + L_{u12}. \quad (4.279)$$

Pentru caracterizarea gradului de cuplaj a două bobine se definesc următorii coeficienți:

- *Coeficientul de cuplaj magnetic K* (4.266):

$$K = \frac{dM}{\sqrt{L_{11}L_{12}}}. \quad (4.280)$$

Pentru bobinele necuplate magnetic  $M = 0$  și  $K = 0$ , iar pentru bobinele perfect cuplate magnetic  $M = \sqrt{L_{11}L_{22}}$  și  $K = 1$ ; prin urmare,  $0 \leq K \leq 1$ .

- Coeficientul de dispersie magnetică  $\sigma$ , definit de relația:

$$\sigma = 1 - K^2 = 1 - \frac{M^2}{L_{11}L_{22}} = \frac{L_{11}L_{22} - M^2}{L_{11}L_{22}}. \quad (4.281)$$

La dispersie magnetică maximă (bobine necuplate)  $K=0$ ,  $\sigma = 1$  și la dispersie nulă (bobine perfect cuplate magnetic)  $K=1$ ,  $\sigma = 0$ ; prin urmare,  $0 \leq \sigma \leq 1$ .

## 4.9. RELAȚIILE FUNDAMENTALE ALE CÂMPULUI MAGNETIC STAȚIONAR ȘI CVASISTAȚIONAR

Câmpul magnetic determinat de conductoarele parcurse de curenți continui se numește *câmp magnetic staționar*. Relațiile fundamentale în care apar mărimile de stare magnetică ale câmpului magnetic staționar sunt date de:

- relația dependenței dintre inducție, intensitate și magnetizație în câmp magnetic (4.182),

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (4.282)$$

respectiv (4.186),

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (4.283)$$

pentru medii liniare, izotrope și omogene, fără magnetizație permanentă;

- teorema lui Ampère, sub formă integrală (4.187), respectiv locală (4.189):

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \, ds = \theta_{S_{\Gamma}}, \quad \text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}; \quad (4.284)$$

- teorema fluxului magnetic sub formă integrală (4.210), respectiv locală (4.207),

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{B} \, \mathbf{n} \, dA = 0, \quad \text{div}\mathbf{B} = 0; \quad (4.285)$$

- consecință a teoremei fluxului magnetic (4.208),

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}. \quad (4.286)$$

**unde  $\mathbf{A}$  este potențialul magnetic vector.**

Regimul câmpului magnetic în care mediile sunt imobile și mărimile de stare sunt variabile în timp, dar variația este relativ lentă, astfel încât se poate neglija contribuția curenților de deplasare (v. par. 6.1) la producerea câmpului magnetic în

comparație cu contribuția curenților de conducție și corpurilor cu magnetizație permanentă, se numește *regim cvasistaționar de tip magnetic*. În cazul general, regimul cvasistaționar se interpretează în sensul posibilității de a neglija fenomenul de producere a undelor electromagnetice. Se poate arăta că aproximația regimului cvasistaționar este valabilă în cazurile în care frecvența de variație în timp a mărimilor este suficient de mică pentru ca lungimea de undă a undelor electromagnetice corespunzătoare să fie mare în comparație cu dimensiunile corpurilor. Pentru corpurile conductoare masive frecvența de variație a mărimilor ar trebui să devină de aproximativ  $10^{16}$  Hz, pentru ca restricția regimului cvasistaționar să înceteze de a mai fi valabilă, în timp ce frecvențele cele mai înalte utilizate sunt de numai  $10^{12}$  Hz. Din acest motiv, conductoarele sunt considerate că se găsesc întotdeauna în regim cvasistaționar. Regimul staționar este un caz particular al regimului cvasistaționar al câmpului magnetic. Relațiile fundamentale ale câmpului magnetic cvasistaționar au aceeași formă cu relațiile fundamentale ale câmpului magnetic staționar (4.282 – 4.286).

#### 4.9.1. Ecuațiile Poisson și Laplace pentru potențialul magnetic vector

Inducția magnetică fiind un câmp solenoidal, potențialul magnetic vector este funcția vectorială  $\mathbf{A}$  atașată câmpului solenoidal definită prin relația (4.286):

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (4.287)$$

Relația (4.287) determină numai componenta solenoidală (rotațională)  $\mathbf{A}_s$  a potențialului vector  $\mathbf{A}$ . Impunem vectorului  $\mathbf{A}$  condiția  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , adică considerăm câmpul vectorului  $\mathbf{A}$  lipsit de surse. Într-adevăr, dacă  $\text{div } \mathbf{A} \neq 0$  se poate scrie:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_p + \mathbf{A}_s, \quad (4.288)$$

unde  $\mathbf{A}_p$  este componenta potențială, iar  $\mathbf{A}_s$  este componenta solenoidală.

Prin urmare,  $\text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}_s$  ( $\text{rot } \mathbf{A}_p = 0$ ) și  $\text{div } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A}_p$  ( $\text{div } \mathbf{A}_s = 0$ ). Rezultă:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}_s, \quad (4.289)$$

adică existența componentei  $\mathbf{A}_p$  nu modifică mărimea  $\mathbf{B}$  și se poate lua  $\mathbf{A}_p = 0$ .

Relația

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (4.290)$$

se aplică în regimurile staționar și cvasistaționar în medii imobile și constituie *condiția de etalonare Coulomb a potențialului vector  $\mathbf{A}$* .

În medii liniare și izotrope lipsite de magnetizație permanentă, relația dependenței dintre inducție, intensitate și magnetizație devine (4.283):

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (4.291)$$

și, prin urmare, ecuația (4.287) se poate scrie sub forma:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mu \mathbf{H}. \quad (4.292)$$



În cazul mediilor omogene, permeabilitatea fiind constantă, ecuația (4.292) devine:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (4.293)$$

Deoarece  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$  și ținând seama de teorema lui Ampère (4.284) și de condiția de etalonare Coulomb (4.290), ecuația (4.293) se transformă astfel:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (4.294)$$

și constituie *ecuația vectorială a lui Poisson*. Partea neomogenă a ecuației (4.294), proporțională cu densitatea curentului electric de conducție, constituie sursa câmpului magnetic.

Dacă  $\mathbf{J} = 0$ , ecuația (4.294) devine:

$$\Delta \mathbf{A} = 0 \quad (4.295)$$

și este numită *ecuația vectorială a lui Laplace*.

Soluția ecuației Poisson pentru potențialul magnetic vector  $\mathbf{A}$  se poate determina prin analogie cu soluția ecuației Poisson pentru potențialul electric  $V$  (2.242):

$$\Delta V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}. \quad (4.296)$$

În cazul unei distribuții de sarcină într-un domeniu finit, când se poate alege potențialul punctului de la infinit nul, ecuația (4.296) admite soluția (2.243):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_v \frac{\rho_v}{r} dv. \quad (4.297)$$

Prin urmare, atunci când distribuția densității curentului de conducție ocupă un domeniu finit, în baza corespondenței  $V \leftrightarrow \mathbf{A}$ ,  $-\frac{\rho_v}{\epsilon} \leftrightarrow \mu \mathbf{J}$ , soluția ecuației lui Poisson pentru potențialul magnetic vector  $\mathbf{A}$  este:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_v \frac{\mathbf{J}}{r} dv, \quad (4.298)$$

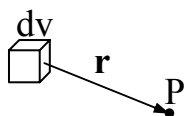


Fig. 4.42

unde integrala este extinsă asupra întregului volum  $v$  în care  $\mathbf{J} \neq 0$  și  $r$  este distanța de la elementul de volum  $dv$  până la punctul în care se calculează  $\mathbf{A}$  (fig. 4.42). Astfel, s-a regăsit relația (4.72) care este valabilă în orice mediu cu permeabilitate magnetică constantă.

*Observație.* Introducând expresia (4.298) în relația (4.287), se obține:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \operatorname{rot} \iiint_v \frac{\mathbf{J}}{r} dv. \quad (4.299)$$

Deoarece rotorul este aplicat în punctul în care se determină vectorul inducție magnetică și nu în puncte din interiorul elementului de volum  $dv$ , operatorul  $\operatorname{rot}$  se poate introduce sub semnul integralei,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_v \operatorname{rot} \frac{\mathbf{J}}{r} dv. \quad (4.300)$$

Utilizând identitatea:  $\operatorname{rot} \frac{\mathbf{J}}{r} = -\mathbf{J} \times \operatorname{grad} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \operatorname{rot} \mathbf{J} = \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ , unde  $\operatorname{rot} \mathbf{J} = 0$  (deoarece vectorul  $\mathbf{J}$  se referă la elementul de volum  $dv$ ), rezultă:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_v \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dv. \quad (4.301)$$

Prin urmare, s-a regăsit relația Biot – Savart – Laplace (4.30) stabilită pentru câmpul magnetic staționar în vid.

În general, rezolvarea ecuațiilor Poisson și Laplace nu se referă la întreg spațiul, deoarece acesta nu este întotdeauna accesibil în întregime. De aceea, apare necesitatea rezolvării ecuațiilor numai pentru un anumit domeniu  $v_\Sigma$  pe a cărui frontieră  $\Sigma$  sunt date în fiecare punct anumite condiții, numite *condiții la limită* sau *pe frontieră*.

Datorită condiției (4.290), condițiile pe frontieră pentru potențialul vector nu se stabilesc la fel ca pentru potențialul electric scalar (v. par. 2.15.3). Deducerea acestor condiții se face cu ajutorul formulelor lui Green pentru câmpuri de vectori.

#### 4.9.2. Formulele lui Green pentru câmpuri de vectori

**Fie doi vectori  $\mathbf{F}$  și  $\mathbf{G}$  definiți în domeniul  $v_\Sigma$ . Aplicând vectorului  $\mathbf{F} \times \operatorname{rot} \mathbf{G}$  teorema divergenței, se obține prima formulă a lui Green pentru câmpuri vectoriale:**

$$\oiint_{\Sigma} (\mathbf{F} \times \operatorname{rot} \mathbf{G}) d\mathbf{A} = \iiint_{v_\Sigma} \operatorname{div}(\mathbf{F} \times \operatorname{rot} \mathbf{G}) dv = \iiint_{v_\Sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{F} \operatorname{rot} \mathbf{G} - \mathbf{F} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{G}) dv. \quad (4.302)$$

**Pentru  $\mathbf{F} = \mathbf{G}$ , relația (4.302) devine:**

$$\oiint_{\Sigma} (\mathbf{F} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}) d\mathbf{A} = \iiint_{v_\Sigma} [(\operatorname{rot} \mathbf{F})^2 - \mathbf{F} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F}] dv. \quad (4.303)$$

**În relația (4.302), înlocuind F cu G și G cu F se obține o relație similară cu (4.302):**

$$\oiint_{\Sigma} (\mathbf{G} \times \text{rot}\mathbf{F}) d\mathbf{A} = \iiint_{v_{\Sigma}} \text{div}(\mathbf{G} \times \text{rot}\mathbf{F}) dv = \iiint_{v_{\Sigma}} (\text{rot}\mathbf{G} \text{rot}\mathbf{F} - \mathbf{G} \text{rot} \text{rot}\mathbf{F}) dv. \quad (4.304)$$

**Scăzând membru cu membru relațiile (4.302) și (4.304) se obține a doua formulă a lui Green pentru câmpuri vectoriale:**

$$\oiint_{\Sigma} (\mathbf{F} \times \text{rot}\mathbf{G} - \mathbf{G} \times \text{rot}\mathbf{F}) d\mathbf{A} = \iiint_{v_{\Sigma}} (\mathbf{G} \text{rot} \text{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F} \text{rot} \text{rot}\mathbf{G}) dv. \quad (4.305)$$

4.9.3. Condițiile pe frontieră de tip Dirichlet și Neumann pentru  
potențialul magnetic vector

Fie  $\mathbf{A}_1(P)$  și  $\mathbf{A}_2(P)$  două soluții distincte ale ecuației Poisson (4.294) în domeniul  $v_{\Sigma}$  cu aceleași condiții pe frontiera  $\Sigma$  a domeniului. Ca urmare, în interiorul domeniului  $v_{\Sigma}$  sunt îndeplinite relațiile:

$$\Delta \mathbf{A}_1(P) = -\mu \mathbf{J}(P); \Delta \mathbf{A}_2(P) = -\mu \mathbf{J}(P); P \in v_{\Sigma}. \quad (4.306)$$

Vectorul diferență,

$$\mathbf{A}_d(P) = \mathbf{A}_1(P) - \mathbf{A}_2(P), P \in v_{\Sigma} \cup \Sigma \quad (4.307)$$

**satisfacă ecuația lui Laplace (4.295)**

$$\Delta \mathbf{A}_d(P) = \Delta \mathbf{A}_1(P) - \Delta \mathbf{A}_2(P) = 0, P \in v_{\Sigma}, \quad (4.308)$$

**cu condiții pe frontieră nule, deoarece cele două soluții au aceleași condiții pe frontiera  $\Sigma$ .**

Scriind prima formulă a lui Green (4.302) pentru vectorul  $\mathbf{A}_d(P)$ , se obține:

$$\oiint_{\Sigma} (\mathbf{A}_d \times \text{rot}\mathbf{A}_d) \mathbf{n} d\mathbf{A} = \iiint_{v_{\Sigma}} [(\text{rot}\mathbf{A}_d)^2 - \mathbf{A}_d \text{rot} \text{rot}\mathbf{A}_d] dv. \quad (4.309)$$

Integrandul primului membru al relației (4.309) conține valorile lui  $\mathbf{A}_d(P)$  și  $\text{rot}\mathbf{A}_d(P)$  pe frontiera  $\Sigma$ . Deoarece ecuația (4.308) are condițiile pe frontieră nule, rezultă că integrandul primului membru al relației (4.309) se anulează fie pentru  $\mathbf{A}_d(P) = 0$  fie pentru  $\text{rot}\mathbf{A}_d = 0$ .

Scriind integrandul primului membru al relației (4.310) sub forma:

$$(\mathbf{A}_d \times \text{rot}\mathbf{A}_d) \mathbf{n} = (\text{rot}\mathbf{A}_d \times \mathbf{n}) \mathbf{A}_d = (\mathbf{n} \times \mathbf{A}_d) \text{rot}\mathbf{A}_d, \quad (4.310)$$

rezultă că acesta se anulează fie prin anularea termenului  $(\mathbf{n} \times \mathbf{A}_d)$  care reprezintă componenta tangențială a lui  $\mathbf{A}_d$ , fie prin anularea termenului  $(\text{rot}\mathbf{A}_d \times \mathbf{n})$  care reprezintă componenta tangențială a lui  $\text{rot}\mathbf{A}_d$ .

Prin urmare, condițiile pe frontieră pentru ecuațiile vectoriale Poisson și Laplace sunt:

- *de tip Dirichlet* sau *de prima speță*, dacă se cunosc pe frontieră componentele tangențiale ale potențialului vector  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A}_t(P) = \mathbf{n} \times \mathbf{A}(P), \quad P \in \Sigma; \quad (4.311)$$

- *de tip Neumann* sau *de a doua speță*, dacă se cunosc pe frontieră componentele tangențiale ale rotorului potențialului vector,

$$\text{rot}\mathbf{A}_t(P) = \mathbf{n} \times [\text{rot}\mathbf{A}(P) \times \mathbf{n}], \quad P \in \Sigma; \quad (4.312)$$

- *de tip Robin* sau *de a treia speță*, dacă în fiecare punct de pe frontieră este dată o relație liniară în raport cu  $\mathbf{A}_t(P)$  și  $\text{rot}\mathbf{A}_t(P)$ ,

$$a(P)\mathbf{A}_t(P) + b(P)\text{rot}\mathbf{A}_t(P) = \mathbf{c}(P), \quad P \in \Sigma, \quad (4.313)$$

unde  $a(P)$ ,  $b(P)$  sunt funcții scalare de punct, iar  $\mathbf{c}(P)$  este o funcție vectorială de punct. Condiția pe frontieră este *omogenă* dacă  $\mathbf{c}(P) = 0$  și *neomogenă* dacă  $\mathbf{c}(P) \neq 0$ .

#### 4.9.4. Teorema unicității soluțiilor ecuațiilor Poisson și Laplace pentru potențialul vector

Enunțul teoremei este următorul: *soluțiile ecuațiilor Poisson (4.294) și Laplace (4.295) cu condiții pe frontieră de tip Dirichlet sunt unice și cu condiții de tip Neumann sunt unice până la un vector constant aditiv, arbitrar.*

Demonstrația teoremei este prezentată în lucrarea [10].

## 4.10. RELAȚIILE FUNDAMENTALE ALE CÂMPULUI MAGNETOSTATIC

Câmpul magnetic produs de corpuri feromagnetice imobile a căror stare de magnetizare este invariabilă în timp și nu este însoțit de transformări de energie se numește *câmp magnetostatic*. În regim magnetostatic, densitatea curentului electric de conducție este nulă,  $\mathbf{J} = 0$  și relațiile fundamentale ale magnetostaticii sunt următoarele:

- relația dependenței dintre inducție, intensitate și magnetizație în câmp magnetic (4.182),

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}); \quad (4.314)$$

- teorema fluxului magnetic sub formă integrală (4.210), respectiv locală (4.207):

$$\Phi_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0; \quad (4.315)$$

- teorema lui Ampère, sub formă integrală (4.187), respectiv locală (4.189):

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0; \quad \text{rot } \mathbf{H} = 0. \quad (4.316)$$

Relația (4.314) se poate scrie sub forma:

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mathbf{I}, \quad (4.317)$$

unde, mărimea vectorială derivată

$$\mathbf{I} = \mu_0\mathbf{M} \quad (4.318)$$

se numește *polarizație magnetică*.

Prin analogie cu modul de caracterizare a corpurilor masive polarizate electric cu ajutorul sarcinilor de polarizație electrică, un corp masiv magnetizat poate fi înlocuit din punctul de vedere al câmpului magnetic pe care îl stabilește în vid cu o repartiție fictivă de *sarcini magnetice dipolare*. Sarcinile magnetice dipolare echivalente unui mic magnet se mai numesc intensități ale polilor magnetici; sarcina pozitivă corespunde polului nord N, iar sarcina negativă polului sud S. Spre deosebire de modelul dipolar al corpurilor polarizate electric căruia îi corespunde la scară microscopică sistemul de particule elementare încărcate cu sarcini electrice, modelul dipolar al corpurilor magnetizate este lipsit de o corespondență microscopică similară. Nici la scară microscopică și nici la scară microscopică nu s-a pus în evidență o sarcină magnetică echivalentă celei electrice. Modelul dipolar magnetic este un model fictiv și are avantajul extinderii metodelor de calcul din electrostatică.

Prin analogie cu sarcina electrică de polarizație (v. par. 2.8.4 – relația 2.76), excesul de sarcină dipolară magnetică de un semn față de sarcina dipolară de semn contrar din interiorul unei suprafețe închise  $\Sigma$  trasată în interiorul unui corp magnetizat, se numește *sarcină de polarizație magnetică*  $q_{pm}$  și este egală cu integrala de suprafață luată cu semn schimbat a polarizației magnetice:

$$q_{pm} = -\oiint_{\Sigma} \mathbf{I} \mathbf{n} dA = -\mu_0 \oiint_{\Sigma} \mathbf{M} \mathbf{n} dA. \quad (4.319)$$

Din relația (4.319) se obține:

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = -\frac{\rho_{vpm}}{\mu_0}, \quad (4.320)$$

unde  $\rho_{vpm}$  este densitatea de volum a sarcinii de polarizație magnetică.

Intensitatea câmpului magnetostatic  $\mathbf{H}$  are rotorul nul (4.316) și divergența  $\operatorname{div} \mathbf{H}$  se calculează din relația (4.314),

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{\rho_{vpm}}{\mu_0}, \quad (4.321)$$

În consecință, se poate defini *potențialul magnetostatic*  $V_m$  al cărui gradient cu semn schimbat este  $\mathbf{H}$ ,

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} V_m \quad (4.322)$$

și satisface ecuația lui Poisson :

$$\Delta V_m = -\frac{\rho_{vpm}}{\mu_0}. \quad (4.323)$$

Ecuația (4.323) este similară cu ecuația lui Poisson pentru potențialul electrostatic (2.242). Deci teoria potențialului magnetostatic  $V_m$  și metodele de integrare ale ecuației (4.323) se elaborează la fel ca în câmpul electrostatic (v. par. 2.15 și 2.16).

Inducția magnetică are divergența nulă (4.315) și rotorul se calculează din relația (4.314):

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{J}_m, \quad (4.324)$$

unde  $\mathbf{J}_m$  este densitatea curentului amperian (4.173). Prin urmare se poate defini *potențialul magnetostatic vector*  $\mathbf{A}$ , al cărui rotor este  $\mathbf{B}$ ,

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (4.325)$$

Ținând seama de condiția de etalonare a lui Coulomb,  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ , din relațiile (4.324) și (4.325) rezultă că potențialul magnetostatic vector  $\mathbf{A}$  satisface ecuația vectorială a lui Poisson:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}_m. \quad (4.326)$$

Se observă că ecuația (4.326) este similară cu ecuația Poisson (4.294), stabilită pentru câmpul magnetic staționar.

Dacă se cunoaște repartiția magnetizației  $\mathbf{M}$  este suficient să se rezolve problema de câmp pentru  $\mathbf{H}$  sau  $\mathbf{B}$  și din ecuația legăturii (4.314) se deduce  $\mathbf{B}$  sau

**H.** În exteriorul câmpurilor magnetizate  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$  sunt proporționali și liniile lor de câmp coincid. Porțiunile de pe suprafețe în care liniile de câmp ies din corpul magnetizat delimitează polul nord, iar cele în care liniile intră delimitează polul sud.

#### 4.11. CIRCUITE MAGNETICE

După modul în care se comportă într-un câmp magnetic exterior, materialele magnetice se împart în două categorii (v. par. 5.1.8): *liniare* și *neliniare*. La rândul lor, materialele liniare se clasifică în *materiale diamagnetice* și respectiv *paramagnetice*. Materialele diamagnetice au susceptivitatea magnetică negativă și foarte mică (de ordinul  $10^{-5} - 10^{-6}$ ) și deci au permeabilitatea relativă subunitară. Materialele paramagnetice, spre deosebire de cele diamagnetice, se caracterizează printr-o susceptivitate magnetică pozitivă, dar foarte mică (de ordinul  $10^{-3} - 10^{-4}$ ). Permeabilitatea lor relativă este deci sensibil supraunitară.

Principalele materiale neliniare, numite *feromagnetice*, se caracterizează printr-o permeabilitate magnetică relativă dependentă de intensitatea câmpului magnetic stabilit în interiorul lor, având valori mult mai mari decât la materialele liniare (de ordinul  $10^4 - 10^5$ ). Inducția magnetică nu este proporțională cu intensitatea câmpului magnetic, relația dintre ele fiind o funcție neliniară  $B(H)$ , numită caracteristică de magnetizare (v. par. 5.1.8).

Fie o suprafață de discontinuitate pentru liniile câmpului magnetic, care separă două medii (fig. 4.43). Dacă mediul 1 este feromagnetic de permeabilitate

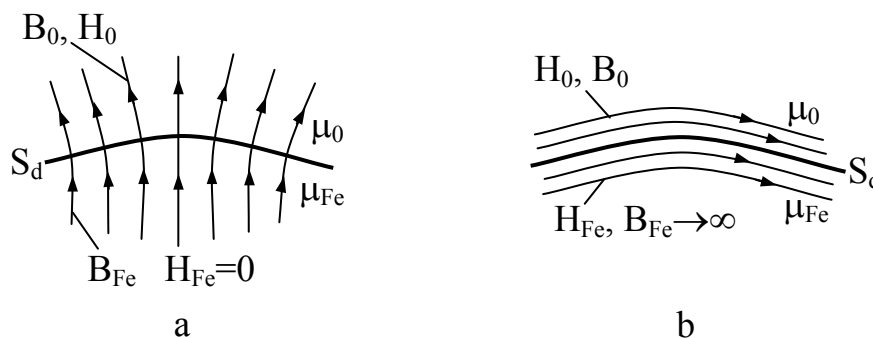


Fig. 4.43

infinită  $\mu_1 = \mu_{Fe} \rightarrow \infty$  și mediul 2 este nemagnetic, de exemplu aer  $\mu_2 = \mu_0$ , teorema refracției liniilor de câmp magnetic (4.215) devine:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = 0 \quad (4.327)$$

și este satisfăcută fie pentru  $\alpha_2 = 0$ , fie pentru  $\alpha_1 = \pi/2$ . În primul caz ( $\alpha_2 = 0$ ), liniile de câmp în aer sunt normale pe suprafața corpului feromagnetic (fig. 4.43, a). În acord cu proprietatea de continuitate a componentelor normale ale inducției magnetice  $B_{0n} = B_{Fen}$ , liniile lui  $\mathbf{B}_{Fe}$  sunt normale pe  $S_d$ , iar intensitatea câmpului magnetic în fier este nulă,  $\mathbf{H}_{Fe} = 0$ . În al doilea caz ( $\alpha_1 = \pi/2$ ), liniile de câmp în

interiorul corpului feromagnetic și în imediata apropiere a lui  $S_d$  sunt tangențiale. În acord cu proprietatea de continuitate a componentelor tangențiale ale intensității câmpului magnetic,  $H_{0t} = H_{Fet}$ , și în aer liniile lui  $\mathbf{H}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  sunt tangențiale la  $S_d$ , iar inducția magnetică în fier este infinită,  $\mathbf{B}_{Fe} \rightarrow \infty$  (fig. 4.43, b). Prin urmare, componenta tangențială a inducției magnetice în fier este mult mai mare în comparație cu cea din aer. În consecință, liniile inducției magnetice sunt concentrate în principal în corpurile feromagnetice; ele se aseamănă cu liniile densității de curent în conductoarele parcurse de curent electric. Prin analogie cu circuitul electric, se numește *circuit magnetic* o succesiune de corpuri feromagnetice care pot fi separate prin medii nemagnetice numite *întrefieruri* prin care se închid liniile inducției magnetice. Câmpul magnetic în interiorul circuitului poate fi produs de conductoare parcurse de curenți electrici care constituie înfășurările circuitului sau de magneți permanenți. Fluxul magnetic printr-o secțiune transversală a circuitului este *fluxul fascicular* și produsul dintre fluxul fascicular și numărul de spire al înfășurării este *fluxul total*.

În funcție de destinația funcțională a circuitului magnetic, anumite porțiuni ale acestuia sunt porțiuni utile (coloanele transformatoarelor, întrefierul electromagneților) și fluxul magnetic prin secțiuni utile se numește *flux fascicular util*. Liniile inducției magnetice care nu se închid prin porțiunile utile ale circuitelor și se închid, de exemplu, prin aer, sunt *liniile de dispersie magnetică*, iar fluxul corespunzător este *flux de dispersie* sau *flux de scăpări*.

Circuitele magnetice intervin ca părți componente esențiale în construcția mașinilor și aparatelor electrice și pentru calculul lor se aplică legile fluxului magnetic și circuitului magnetic. În regim staționar și în anumite condiții și în regim cvasistaționar, consecințe ale acestor legi sunt teoremele lui Ohm și Kirchhoff pentru circuitele magnetice, corespunzând dual teoremelor lui Ohm și Kirchhoff pentru circuitele electrice. Dacă fluxurile de dispersie sunt neglijabile în raport cu cele utile, circuitele magnetice se studiază la fel ca circuitele electrice cu parametri concentrați. Din punctul de vedere al proprietăților de material, se disting *circuite magnetice liniare* constituite numai din porțiuni cu caracteristici liniare cum sunt materialele feromagnetice moi și nesaturate și *circuitele magnetice neliniare* care conțin cel puțin o porțiune cu caracteristică magnetică neliniară (cum sunt materialele feromagnetice saturate – v. par. 5.1.8).

Din punctul de vedere al producerii câmpului magnetic se deosebesc:

- circuite magnetice cu magneți permanenți, în care fluxul magnetic este produs de magnetizația permanentă a unor magneți;
- circuite magnetice de curent continuu, în care curentul prin înfășurări este continuu;
- circuite magnetice de curent alternativ, în care înfășurările sunt parcurse de curenți alternativi;
- circuite magnetice mixte, în care fluxul este produs în cel puțin două moduri diferite dintre cele arătate;



Circuitele magnetice de curent alternativ au miezul divizat în tole subțiri izolate între ele și sunt așezate paralel cu liniile de câmp magnetic în vederea reducerii pierderilor prin curenți turbionari (v. par. 6.4.1).

#### 4.11.1. Circuite magnetice liniare

a. Relația lui Ohm pentru circuite magnetice . Reluctanță și permeanță. Se consideră un tub de flux magnetic suficient de subțire și fie  $ds$  elementul de lungime al axei tubului (fig. 4.44). Tensiunea magnetică  $U_{m12}$  între două puncte 1 și 2 situate pe curba  $C$  este:

$$U_{m12} = \int_1^2 \mathbf{H} \, ds = \int_1^2 \frac{\mathbf{B}}{\mu} \, ds. \quad (4.328)$$

Alegând aria secțiunii transversale  $A$  paralelă cu  $ds$ , rezultă:

$$U_{m12} = \int_1^2 \frac{\mathbf{B} \, \mathbf{A}}{\mu \, A} \, ds = \Phi_f \int_1^2 \frac{ds}{\mu \, A}, \quad (4.329)$$

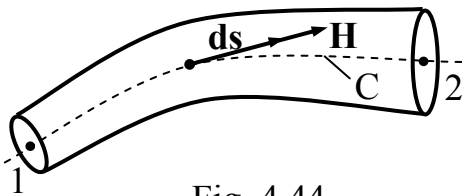


Fig. 4.44

unde  $\mathbf{B} \, \mathbf{A} = \Phi_f$  este fluxul fascicular, același prin orice secțiune transversală a tubului.

Mărimea pozitivă, definită de raportul dintre tensiunea magnetică  $U_{m12}$  și fluxul fascicular  $\Phi_f$  se numește *reluctanță magnetică* a porțiunii de tub (circuit magnetic),

$$R_{m12} = \frac{U_{m12}}{\Phi_f} > 0 \quad (4.330)$$

Din relația (4.330) rezultă că reluctanța unui tub subțire de flux magnetic are expresia:

$$R_{m12} = \int_1^2 \frac{ds}{\mu \, A}. \quad (4.331)$$

Dacă materialul este liniar, permeabilitatea magnetică este constantă și se obține:

$$R_{m12} = \frac{1}{\mu} \int_1^2 \frac{ds}{A}. \quad (4.332)$$

Pentru o porțiune de circuit de lungime  $\ell$ , secțiune  $A$  și permeabilitate  $\mu$  constante, relația (4.332) devine:

$$R_m = \frac{\ell}{\mu \, A}. \quad (4.333)$$

Mărimea pozitivă, definită de raportul dintre  $\Phi_f$  și  $U_{m12}$  se numește *permeanță*  $\Lambda_m$  a circuitului,

$$\Lambda_{m12} = \frac{\Phi_f}{U_{m12}} = \frac{1}{R_{m12}} > 0 \quad (4.334)$$

și este inversa reluctanței .

În S.I. unitatea de reluctanță este numită amperspiră pe weber (A/Wb) și este reluctanța unei porțiuni omogene de circuit magnetic în care tensiunii magnetice de o amperspiră îi corespunde fluxul fascicular de un Wb; unitatea ( în S.I. ) de permeanță este aceeași cu a inductivității, adică henry (H).

Tab. 4.1

tensiunea electrică $U$	tensiunea magnetică $U_m$
t.e.m. $E$	t.m.m. $E_m$ sau solenație $\theta$ ;
intensitatea curentului electric $I$	fluxul fascicular $\Phi_f$
rezistența electrică $R$	reluctanța magnetică $R_m$
conductanța electrică $G$	permeanța magnetică $\Lambda_m$

**Utilizând corespondența duală din tabelul 4.1, relațiile (4.330) și (4.334) scrise sub formule:**

$$U_m = R_m \Phi_f; \quad \Phi_f = \Lambda_m U_m \quad (4.335)$$

alcătuiesc *relațiile lui Ohm pentru circuite magnetice*, prin analogie cu relațiile lui Ohm pentru circuite electrice. De asemenea, prin analogie cu căderea de tensiune electrică  $RI$ , produsul  $R_m \Phi_f$  se numește *cădere de tensiune magnetică*.

*Observație.* Dacă permeabilitatea miezurilor circuitelor magnetice se poate

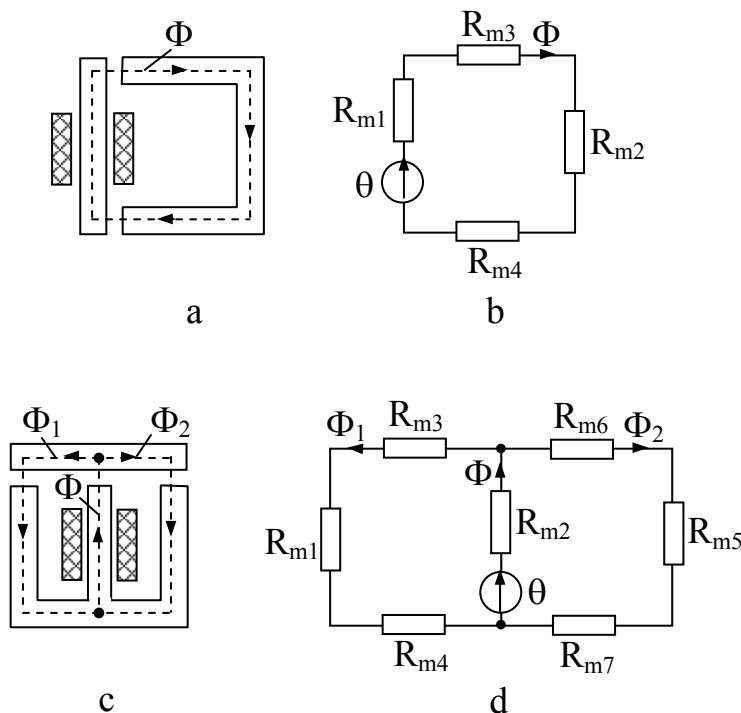


Fig. 4.45

considera constantă, calculul permeanței se face în mod analog cu cel al rezistenței electrice, respectiv al capacității electrice, în acord cu corespondența duală:

$$C \leftrightarrow G \leftrightarrow \Lambda. \quad (4.336)$$

b. Teorema I a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice. **Din punct de vedere al configurației geometrice, se deosebesc circuite magnetice neramificate al căror flux fascicular util aparține unui singur tub închis de linii de câmp (fig. 4.45, a) și circuite magnetice ramificate al căror flux fascicular util aparține unor tuburi de câmp cu ramificații (fig. 4.45, c). Ramificațiile în lungul cărora fluxul fascicular este constant, alcătuiesc laturile circuitului, iar punctele de ramificație a mai multor laturi se numesc noduri; succesiunea închisă de laturi alcătuind un ochi sau o buclă.**

Se consideră nodul (n) unui circuit magnetic (fig. 4.46, a) și se aplică legea fluxului magnetic unei suprafețe închise  $\Sigma$  care închide nodul (n):

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{f1} + \Phi_{f2} + \dots + \Phi_{fj} + \dots + \Phi_{fm} = 0, \quad (4.337)$$

respectiv,

$$\sum_{j \in (n)} \Phi_{fj} = 0. \quad (4.338)$$

Relația (4.338) este similară cu relația corespunzătoare din teoria circuitelor (fig.

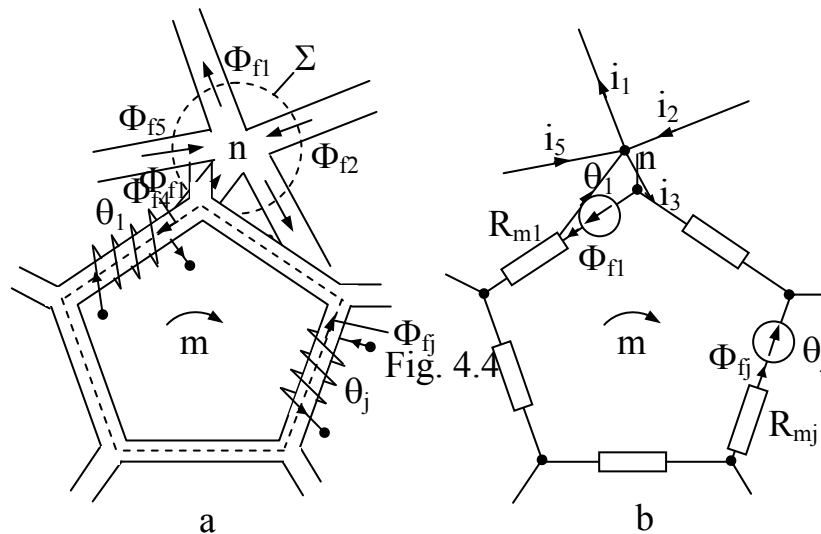


Fig. 4.47

4.46, b)  $\sum_{j \in (n)} i_j = 0$  și constituie prima teoremă a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice: *suma algebrică a fluxurilor prin laturile j ale unui circuit magnetic, ramificate într-un nod (n) este nulă.* Fluxurile cu sensurile de referință spre nod se consideră prin convenție negative, iar cele cu sensul dinspre nod, pozitive.

c. **Teorema a II-a a lui Kirchhoff pentru circuitele magnetice.** Se consideră un ochi (m) de circuit magnetic al cărui sens de referință este sensul în care se efectuează integrala de linie a vectorului  $\mathbf{H}$  (fig. 4.47, a). Fiecare latură j a

ochiului este caracterizată de reluctanța  $R_{mj}$ , fluxul fascicular  $\Phi_{fj}$  și de solenația  $\theta_j$ . Fluxurile și solenațiile sunt pozitive sau negative după cum sensurile lor de referință coincid sau sunt opuse sensului ochiului (m). În conformitate cu teorema lui Ampère, tensiunea magnetomotoare în lungul ochiului este egală cu suma solenațiilor  $\theta_j$  ale laturilor ochiurilor:

$$U_{m\Gamma} = \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \, ds = \sum_{j \in m} \theta_j. \quad (4.339)$$

Dar  $U_{m\Gamma} = \sum_{j \in m} U_{mj}$ , unde  $U_{mj} = R_{mj} \Phi_{fj}$  și deci rezultă:

$$\sum_{j \in m} R_{mj} \Phi_{fj} = \sum_{j \in m} \theta_j. \quad (4.340)$$

Această relație, similară cu relația corespunzătoare din teoria circuitelor electrice în regim staționar (fig. 4.47, b),  $\sum_{j \in m} R_j I_j = \sum_{j \in m} E_j$ , constituie *a doua teoremă*

*a lui Kirchhoff pentru circuitele magnetice: suma algebrică a solenațiilor  $\theta_j$  care înlanțuie laturile  $j$  ale unui ochi de circuit magnetic (m) este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune magnetică  $R_{mj} \Phi_{mj}$ .*

Dacă sensurile de referință ale fluxurilor  $\Phi_{fj}$ , respectiv ale solenațiilor  $\theta_j$  coincid cu sensul ochiului (m), produsele  $R_{mj} \Phi_{mj}$  se introduc cu semnul plus, iar în caz contrar cu semnul minus. Pentru laturile care prezintă dispersie se poate considera o latură legată în paralel și care corespunde fluxului de dispersie.

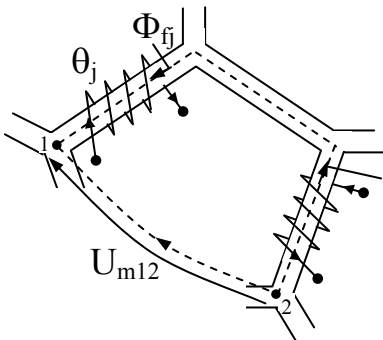


Fig. 4.48

**d. Tensiunea magnetică între două puncte ale unui circuit magnetic.** Pentru a calcula tensiunea magnetică  $U_{m12}$  prin aer între două puncte (1) și (2) ale unui circuit magnetic ramificat (fig. 4.48), se consideră un ochi trasat prin aer de la (1) la (2) și

apoi în lungul laturilor circuitului de la (2) la (1).

Aplicând a doua teoremă a lui Kirchhoff (4.340), rezultă:

$$\sum_{j \in (m)} \theta_j = \sum_{j \in m} R_{mj} \Phi_{mj} - U_{m12}, \quad (4.341)$$

sau,

$$U_{m12} = \sum_{j \in (m)} (R_{mj} \Phi_{mj} - \theta_j). \quad (4.342)$$

e. Teoremele reluctanțelor echivalente. **Analogia dintre teoremele lui Kirchhoff pentru circuitele magnetice și cele pentru circuitele electrice, permite stabilirea și în cazul teoriei circuitelor magnetice a unora dintre teoremele rețelelor liniare de curent continuu cum sunt: teorema superpoziției, substituției, generatoarelor**

echivalente etc. În acest sens, schemelor magnetice le corespund scheme electrice cu simboluri similare (fig. 4.45, b și d, fig. 4.47, b).

Reluctanța echivalentă  $R_{me}$  a unei porțiuni de circuit magnetic (fără solenații pe laturi) între două extremități (1) și (2) este egală cu raportul dintre tensiunea

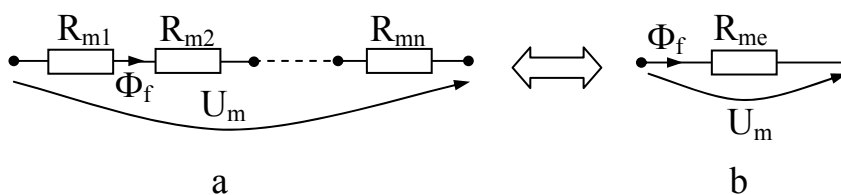


Fig. 4. 49

magnetică  $U_{m12}$  și fluxul fasciculelor care intrând pe la borna (1) iese pe la borna (2):

$$R_{me} = \frac{U_m}{\Phi_f}. \quad (4.343)$$

Dacă circuitul magnetic are (n) laturi în serie (fig. 4.49, a), fluxul fiind același prin toate laturile, aplicând a doua teoremă a lui Kirchhoff se obține:

$$R_{me} = \sum_{j=1}^n R_{mj}, \quad (4.344)$$

adică reluctanța echivalentă este egală cu suma reluctanțelor laturilor (fig. 4.49, b).

Dacă circuitul are (n) laturi în paralel (fig. 4. 50, a), tensiunea magnetică

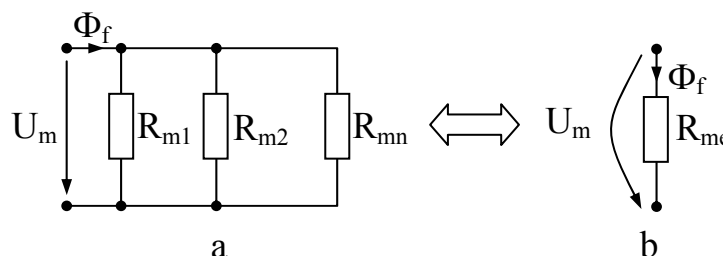


Fig. 4. 50

fiind aceeași, aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff rezultă:

$$R_{me} = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_{mj}}}; \quad \Lambda_e = \sum_{j=1}^n \Lambda_j, \quad (4.345)$$

adică permeanța echivalentă este egală cu suma permeanțelor laturilor.

**f. Calculul circuitelor magnetice liniare.** La formă constructivă dată a circuitelor magnetice (dimensiuni și permeabilități), calculul acestora constă fie în determinarea solenației necesare pentru a stabili anumite fluxuri utile, fie în determinarea fluxurilor utile la solenații date. De obicei, calculul constă în determinarea fluxurilor în laturile unui circuit magnetic a cărui structură este

complet cunoscută, cunoscându-se de asemenea și solenațiile. O astfel de analiză se efectuează, de obicei, cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff. În cazul în care circuitul magnetic este constituit din  $n$  noduri și  $l$  laturi, analiza revine la soluționarea sistemului de ecuații algebrice liniare obținut prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff nodurilor independente ( $n - 1$ ) și a celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff ochiurilor independente ( $l - n + 1$ ).

#### 4.11.2. Circuite magnetice neliniare

Pentru circuitele magnetice neliniare, teoremele lui Kirchhoff au formulele (4.338) și (4.339):

$$\sum_{j \in (n)} \Phi_{fj} = 0; \quad \sum_{j \in (n)} U_{mj} = \sum_{j \in (m)} \theta_j. \quad (4.346)$$

Calculul circuitelor magnetice neliniare se efectuează grafo-analitic respectiv numeric utilizând curbele de magnetizare  $B(H)$  ale porțiunilor omogene de circuit în care fluxul se presupune repartizat uniform pe secțiuni. La fel ca în cazul circuitelor magnetice liniare, se consideră cunoscute dimensiunile geometrice, numerele de spire ale înfășurărilor și curbele de magnetizare. Calculul constă în determinarea solenațiilor (deci a curenților) necesare pentru a stabili anumite fluxuri, sau din determinarea fluxurilor la solenații date. În primul caz, se procedează în felul următor:

- fiind dat fluxul fascicular se împarte circuitul în porțiuni de lungimi  $s_k$  cu secțiuni aproximativ constante  $A_k$  și se determină inducțiile magnetice corespunzătoare  $B_k = \Phi_f / A_k$ ;
- din curba de magnetizare a materialului se deduce intensitatea câmpului magnetic  $H_k$ , iar în întrefieruri  $H_0 = B_0 / \mu_0$ ;
- tensiunea magnetomotoare în lungul unei linii mediane închise  $\Gamma$  trasată prin fier și întrefieruri este egală cu solenația  $\theta_{s\Gamma}$ ,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \, ds = \sum_{k=1}^n H_k s_k = \theta_{s\Gamma} = Ni. \quad (4.347)$$

În cel de-al doilea caz, problema determinării fluxului magnetic la solenație dată nu se poate rezolva direct deoarece materialul este neliniar. Calculul se face prin aproximații succesive:

- se iau valori apropiate pentru fluxul fascicular și se deduc solenațiile corespunzătoare;
- se trasează caracteristica  $\Phi_f = \Phi_f(\theta)$ ;
- din caracteristica de magnetizare  $B(H)$  se deduce fluxul corespunzător unei solenații date, respectiv solenația care corespunde unui flux dat.

#### 4.11.3. Circuite magnetice cu magneti permanenți

Studiul circuitelor magnetice cu magneti permanenți, în care rolul amperspirelor magnetizante este îndeplinit de magnetul permanent, este similar cu

studiul electromagneților. În practică, numai o parte din circuitul magnetic este constituit din materiale cu magnetizație permanentă; în acest sens stabilirea condițiilor în care un material de magnet permanent, de volum dat, este utilizat eficient în circuitul magnetic constituie una dintre problemele circuitelor cu magneți permanenți.

**Indicele de calitate al magneților permanenți.** Magneții permanenți sunt în general utilizați pentru producerea unei inducții magnetice într-un întrefier de dimensiuni date. Se consideră un magnet permanent în formă de inel având un întrefier (fig. 4.51). Notând cu  $B_e$  și  $B_i$  inducțiile magnetice în aer, respectiv în fier și cu  $A_e$ ,  $A_i$  ariile secțiunilor utile a întrefierului, respectiv magnetului, din conservarea fluxului magnetic rezultă:

$$B_e A_a = B_i A_i. \quad (4.348)$$

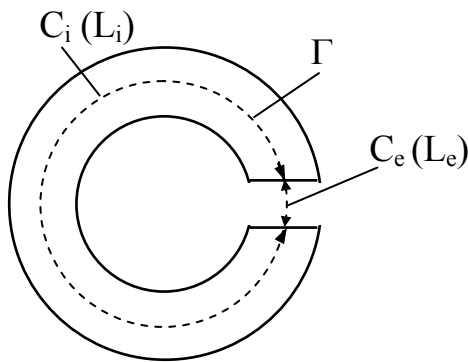


Fig. 4.51

Din teorema lui Ampere, aplicată în lungul curbei închise  $\Gamma = C_e \cup C_i$ , rezultă:

$$\int_0^{L_i} H_i ds_i + \int_0^{L_e} H_e ds_e = 0, \quad (4.349)$$

unde  $L_i$  și  $L_e$  sunt lungimile curbelor  $C_i$  și  $C_e$ . Notând cu  $H_{mi}$  și  $H_{me}$  valorile medii ale intensităților câmpului magnetic în interiorul magnetului și în întrefier,

$$H_{mi} = \frac{1}{L_i} \int_0^{L_i} H_i ds_i, \quad H_{me} = \frac{1}{L_e} \int_0^{L_e} H_e ds_e, \quad (4.350)$$

rezultă:

$$H_{me} L_e = - H_{mi} L_i. \quad (4.351)$$

Multiplicând membru cu membru relațiile (4.348) și (4.351), se obține:

$$B_e H_{me} L_e A_e = - B_i H_{mi} L_i A_i, \quad (4.352)$$

sau,

$$\frac{v_i}{v_e} = - \frac{B_e H_{me}}{B_i H_{mi}}, \quad (4.353)$$

unde  $v_i = L_i A_i$  și  $v_e = L_e A_e$  sunt volumele materialului magnetului și întrefierului. Deoarece în întrefier  $B_e = H_{me} \mu_0$ , relația (4.353) devine:

$$\frac{v_i}{v_e} = - \frac{\mu_e H_{me}^2}{B_i H_{mi}}. \quad (4.354)$$

Din relația (4.354) rezultă că la valori date  $v_e$  și  $H_{me}$  în întrefier, volumul  $v_i$  al materialului magnetului este cu atât mai mic cu cât produsul  $B_i H_{mi}$  este mai mare.

Produsul  $B_i H_{mi} = (BH)_m$  este o mărime care caracterizează eficiența utilizării magneților și se numește *indice de calitate al magnetului*.

## 4.12. METODE DE ANALIZĂ A CÂMPULUI MAGNETIC STAȚIONAR

Metodele de calcul a câmpului magnetic staționar, cvasistaționar, respectiv magnetostatic, sunt în mare măsură similare cu cele ale câmpului electrostatic. Ceea ce deosebește însă cele două clase de probleme constă în tipurile de ecuații Poisson - Laplace pe care le satisfac: scalare pentru potențialul electrostatic  $V$  și vectoriale pentru potențialul vectorial  $A$ .

Calculul intensității câmpului magnetic  $H$  și a inducției magnetice  $B$  presupune cunoscute configurația geometrică a conductoarelor, proprietățile de material ale mediilor și intensitățile curenților în conductoare. Metodele de analiză se clasifică la fel ca în câmp electrostatic, în metode analitice, numerice, grafice și grafo – analitice.

### 4.12.1. Metode analitice de calcul a câmpului magnetic staționar și cvasistaționar

Principalele metode analitice sunt: metoda directă, metoda imaginilor magnetice, metoda integrării ecuațiilor Poisson și Laplace prin separarea variabilelor, metoda funcțiilor de variabilă complexă [10, 13], metoda transformărilor conforme [10,13].

**a. Metoda directă** constă din aplicarea teoremelor Biot – Savart – Laplace, potențialului magnetic scalar și Ampère. Cu aceste teoreme s-a calculat câmpul magnetic pentru diferite repartiții de curent (v. par. 4.4.3, 4.4.7, 4.7.1, 4.8).

**b. Metoda imaginilor magnetice** corespunde dual metodei imaginilor electrice (v. par. 2.16.1). Să presupunem că în vecinătatea unui plan infinit care limitează un mediu feromagnetic, pentru care permeabilitatea magnetică este infinit de mare  $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$ , se găsește paralel cu planul, la distanța  $h$ , un conductor filiform infinit lung, parcurs de curentul  $i$ . Suprafața mediului feromagnetic este o suprafață magnetic echipotențială, deoarece liniile intensității câmpului magnetic în aer sunt perpendiculare pe această suprafață (v. fig. 4.43, a). Prin suprimarea mediului feromagnetic, se introduce conductorul filiform imagine, parcurs de curentul  $i' = i$ , situat la distanța  $h$  față de suprafața semispațiului feromagnetic. Planul median dintre conductorul real și conductorul imagine coincide cu suprafața de separație și este un plan magnetic echipotențial. Prin urmare, după înlocuirea mediului feromagnetic prin conductorul imagine, condițiile în planul de separație nu s-au schimbat. Deci, câmpul conductorului rectiliniu situat în aer, paralel cu



semispațiul feromagnetic și parcurs de curentul  $i$  coincide în aer cu câmpul produs de cei doi curenți  $i$  și  $i'$ , în ipoteza că mediul feromagnetic a fost îndepărtat.

**c. Metoda integrării ecuațiilor Poisson și Laplace prin separarea variabilelor.** În sistemul cartezian de coordonate, ecuațiile vectoriale Poisson – Laplace se descompun în trei ecuații scalare, cărora li se poate aplica metoda separării variabilelor. De exemplu, pentru ecuația Laplace (4.295)  $\Delta \mathbf{A} = 0$ , se obține:

$$\Delta A_x = 0; \Delta A_y = 0; \Delta A_z = 0. \quad (4.355)$$

Integrarea ecuațiilor (4.355) prin separarea variabilelor se face la fel ca pentru ecuația Laplace a potențialului electrostatic  $\Delta V = 0$  (v. par. 2.16.16).

În cazurile particulare în care potențialul magnetic vector are numai una dintre componente nenulă, este posibilă separarea variabilelor și în alte sisteme de coordonate.

#### **4.12.2. Metode numerice de calcul a câmpului magnetic staționar și cvasistaționar**

În sistemul cartezian de coordonate, ecuațiile vectoriale Poisson – Laplace se descompun în trei ecuații scalare, cărora li se pot aplica metodele numerice de analiză a câmpului electrostatic (v. par. 2.16.2). În cazurile particulare în care potențialul magnetic vector are numai una dintre componente nenulă, este posibilă aplicarea metodelor numerice și în alte sisteme de coordonate.