

CÂMPUL ELECTROSTATIC

Câmpul electrostatic este stabilit de corpuri imobile a căror repartiție de sarcină electrică, respectiv stare de polarizare este invariabilă în timp și nu este însoțit de transformări de energie. În acest caz, fenomenele electrice se produc independent de cele magnetice și ca urmare studiul câmpului electric și, respectiv, magnetic se poate face separat.

Regimul electrostatic nu se realizează efectiv, fiind aproximarea unui regim lent variabil în timp în care transformările energiei sunt neglijabile.

2.1. STAREA DE ELECTRIZARE ȘI CÂMPUL ELECTRIC

Frecând o vergea de sticlă cu postav de lână sau mătase și apoi separându-le, între ele și asupra unor mici corpuri (bucăți mici de hârtie, cristale de gips etc.) situate în apropiere se exercită forțe, respectiv cupluri denumite *acțiuni ponderomotoare*. Ca urmare a tratamentului aplicat, vergeaua de sticlă și postavul de lână se găsesc într-o stare care nu este nici mecanică și nici termică, numită *stare de electrizare*.

Starea de electrizare a corpurilor este numită orice stare în care acestea pot exercita acțiuni ponderomotoare de natură electrică (forțe sau cupluri) asupra altor corpuri, adică acțiuni ponderomotoare de aceeași natură cu cele exercitate de corpurile electrizate prin frecare.

Din punct de vedere microscopic, starea de electrizare a unui corp înseamnă aducerea acestuia în situația de a avea un exces sau o lipsă de electroni.

În afară de frecare, corpurile mai pot fi electrizate prin contact direct cu corpuri electrizate, prin comprimarea sau întinderea unor cristale (piezoelectrizare), prin încălzire (piroelectrizare), prin iradiere cu raze Röntgen, prin reacții chimice etc.

Starea de electrizare se poate comunica de la un corp electrizat la un corp neelectrizat prin contact sau prin influență. După durata în care se transmite starea de electrizare, corpurile pot fi împărțite în trei categorii:

- *Corpuri conductoare* sau mai simplu *conductori*, care transmit starea de electrizare într-un timp foarte scurt, de ordinul $10^{-10} - 10^{-12}$ s, deci practic instantaneu. Din clasa conductorilor fac parte metalele, soluțiile de acizi, baze și săruri precum și gazele în timpul arderii;

- *Corpuri izolante* sau mai simplu *izolanți*, care transmit starea de electrizare într-un timp lung, de ordinul zilelor, lunilor. Din clasa izolanților fac parte sticla, mica, cauciucul, masele plastice, porțelanul etc.;

Observație. Nu există izolanți perfecți; toate materialele sunt conductoare. Numai vidul este perfect izolanț.

- *Corpuri slabconductoare*, care au proprietăți intermediare, timpul de transmitere a stării de electrizare fiind de ordinul fracțiunilor de secundă sau al secundelor. Materialele slabconductoare mai importante sunt semiconductorii (germaniul, siliciul, seleniul, telurul etc.).

Acțiunile ponderomotoare care se exercită între corpuri electrizate sau asupra corpurilor situate în apropiere, acțiuni care nu existau înainte de electrizare, pun în evidență existența unui nou sistem fizic în spațiul din jurul corpurilor electrizate, denumit *câmp electric*.

În concordanță cu definiția generală a câmpului de la paragraful 1.1, este denumit câmp electric sistemul fizic care există în regiunile din spațiu în care se pot exercita asupra corpurilor acțiuni ponderomotoare de natură electrică. Interacțiunea între corpurile electrizate se produce prin intermediul câmpului electric produs de corpurile electrizate.

În vecinătatea unui corp electrizat și, în general, într-un câmp electric, corpurile punctiforme din materiale conductoare au o comportare diferită de a celor din materiale izolante. Un conductor punctiform, electrizat prin contact este acționat de o forță care nu depinde de orientarea lui în raport cu corpul de referință electrizat și nu este acționat de un cuplu care să-l rotească în raport cu centrul lui de masă. Conductorul punctiform se comportă ca un punct material în mecanică și starea lui de electrizare se numește de *încărcare electrică*. Un corp punctiform dintr-un material izolanț, chiar și neelectrizat prin contact, poate fi acționat de un cuplu și eventual de o forță, ambele depinzând de orientarea micului corp în raport cu corpul electrizat de referință; comportarea lui este diferită de a punctelor materiale din mecanică și starea lui de electrizare se numește de *polarizare electrică*. Spre deosebire de conductori care se pot afla numai în stare de încărcare electrică, stările de electrizare ale materialelor izolante pot fi atât de încărcare cât și de polarizare. Materialele susceptibile de a se polariza electric se numesc *dielectrics*.

2.2. SARCINA ELECTRICĂ ADEVĂRATĂ A CORPURIILOR PUNCTIFORME

Se consideră un sistem de corpuri conductoare electrizate, situate în vid, a căror stare de electrizare este constantă în timp. În concepția acțiunii din aproape în aproape, exercitarea acțiunilor ponderomotoare asupra unor corpuri plasate în apropierea corpurilor electrizate, pune în evidență apariția unui sistem fizic distinct în spațiul din jurul lor – *câmpul electric*. Interacțiunea nu se produce direct între corpuri, ci prin intermediul câmpului.

Pentru studiul stării de încărcare electrică și pentru explorarea câmpului electric se utilizează un *corp de probă*. Corpul de probă este un corp conductor electrizat care trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

- să fie cât mai mic posibil (teoretic punctual) pentru ca forța care se exercită asupra lui să poată fi aproximată prin forța care ar acționa în acel punct și nu rezultanta forțelor din regiunea ocupată de corp;
- să i se poată comunica cu ușurință stări de electrizare diferite, deci să fie metalic sau având o suprafață metalizată;
- starea lui de electrizare, pentru orice poziție în câmp, să fie invariabilă în timp;
- prin prezența lui să se modifice cât mai puțin starea electrică care există în lipsa acestuia.

Se consideră o mulțime de corpuri de probă identice din punct de vedere structural, care au fost însă electrizate diferit. Introducem succesiv aceste corpuri de probă în același punct P din câmpul electric al conductoarelor, considerate imobile și cu o electrizare invariabilă în timp. Se constată că asupra corpurilor de probă se exercită o forță, a cărei mărime și sens este, în general, diferită de la corp la corp, dar a cărei direcție rămâne constantă. Deci, corpurile de probă se pot grupa în clase de echivalență, utilizând relația de echivalență “aceeași mărime a forței de interacțiune”. Ordonarea claselor de echivalență se va face în raport cu relația de ordonare “forța mai mare”. Alegând alt punct P_1 , forța exercitată asupra fiecărui corp de probă este, în general, diferită ca mărime, direcție și sens față de forța care se exercita asupra sa în punctul P, însă se constată că împărțirea corpurilor de probă în clase de echivalență și ordonarea lor față de noile forțe de interacțiune rămâne aceeași.

Rezultă că proprietatea pusă în evidență prin împărțirea în clase de echivalență a mulțimii corpurilor de probă este o caracteristică a acestora, determinată de starea lor de electrizare și nu depinde de punctul din câmp în care sunt introduse. Aceasta permite asocierea valorilor numerice ale mărimii care descrie starea de electrizare a unor corpuri de probă, numită *sarcină electrică* q (cu precizarea uneori necesară de *adevărată* sau *liberă*, pentru a o deosebi de sarcina electrică de polarizație), proporțional cu valorile numerice ale forțelor exercitate asupra acestora într-un punct P dat din regiunea în care există câmp electric. Deci, se poate scrie relația:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{F_{q_1v}(P)}{F_{q_2v}(P)}, \quad (2.1)$$

unde q_1 și q_2 sunt sarcinile electrice a două corpuri de probă, iar $F_{q_1v}(P)$ și $F_{q_2v}(P)$ sunt forțele care se exercită asupra acestora într-un punct dat P din vid.

Denumirea de sarcină electrică liberă provine din posibilitatea acesteia de a se transmite ușor de la un corp conductor la altul, spre deosebire de sarcinile din constituția dielectricilor care nu au această proprietate și de aceea se numesc *sarcini electrice legate*.

Caracterul scalar al sarcinii electrice se constată experimental, prin faptul că direcția forței care acționează asupra corpului de probă nu depinde de starea sa de electrizare. Faptul că sensul forței se poate schimba, arată că acest scalar poate fi atât pozitiv cât și negativ. Convențional se alege pozitivă sarcina electrică de tipul celei produse la electrizarea sticlei frecate cu mătase și negativă, sarcina mătăsii frecate cu sticlă.

Prin aducerea unui corp în starea în care sarcina lui electrică este nenulă, corpul se încarcă cu sarcină electrică și el se află în stare de încărcare electrică; prin aducerea unui corp încărcat cu sarcină electrică în stare neutră, corpul se descarcă electric.

Pentru măsurarea sarcinii electrice a unui corp se poate utiliza următorul procedeu. Se adoptă ca stare de referință, starea de încărcare electrică a unui corp de probă oarecare, încărcat electric. Se vor considera mai multe astfel de corpuri de probă în stare identică, numite corpuri de referință. Se utilizează proprietatea sarcinii electrice de a fi o mărime extensivă și de a se transmite de pe un corp pe altul: sarcina electrică a unui corp oarecare este egală și de semn contrar cu suma sarcinilor corpurilor de referință care trebuie aduse în contact cu corpul dat, pentru a-i anula starea de electrizare.

Din punct de vedere microscopic, sarcina electrică a unui corp este repartizată particulelor microscopice ale aceluiași corp. Fiecare particulă microscopică de un anumit tip are totdeauna aceeași sarcină electrică. Deci, din punct de vedere microscopic, sarcina electrică este repartizată discontinuu în spațiu. Sarcina electrică este negativă dacă electronii sunt în exces și pozitivă dacă sunt în lipsă.

Din punct de vedere macroscopic, se consideră că sarcina electrică adevărată, ca și substanța, este repartizată în mod continuu în întreg domeniul ocupat de corpul dat. Interpretarea macroscopică este deci idealizată, dar permite simplificarea calculelor și este, în numeroase aplicații, de o precizie satisfăcătoare.

Sarcina electrică adevărată sau sarcina electrică liberă este numită mai concis sarcina electrică. Particulele încărcate cu sarcină electrică, cum sunt electronii și ionii, care se pot deplasa, asigurând transportarea sarcinii electrice sunt numite *purtători de sarcină electrică*.

Sarcina electrică este o mărime primitivă, deoarece s-a definit punând în evidență proprietățile ei de structură prin analiza datelor experimentale (nefiind posibil să se deducă cu relații analitice din alte mărimi fizice de referință).

În sistemul de unități S.I., sarcina electrică este o mărime secundară. În acest sistem, unitatea de sarcină electrică, numită *coulomb* (C), se definește cu ajutorul teoremei lui Coulomb (v. par. 2.5.1) și este sarcina electrică care încarcă egal două conductoare punctiforme situate în vid la distanța de 1 m, forța care se exercită asupra lor fiind egală cu $9 \cdot 10^9$ newtoni.

2.3. INTENSITATEA CÂMPULUI ELECTRIC ÎN VID

Sarcina electrică caracterizează starea de electrizare prin încărcare a corpurilor, dar nu este suficientă pentru caracterizarea acțiunilor ponderomotoare care se exercită asupra corpurilor încărcate electric. Electrizarea corpurilor, de exemplu prin frecare, arată că în regiunile în care se găsesc corpuri electrizate, există câmp electric, pus în evidență de forțele și cuplurile care acționează asupra lor; se spune că aceste corpuri produc câmp electric. Prezența corpurilor electrizate nu este o condiție necesară de existență a câmpului electric decât în regim static. În regim variabil, câmpul electric poate fi produs și prin variația în timp a câmpului magnetic.

În cadrul concepției de acțiune la distanță, se consideră că forțele și cuplurile electrice se exercită instantaneu între corpurile electrizate; în conformitate cu concepția de acțiune prin contiguitate, forțele și cuplurile electrice se transmit localizat prin intermediul câmpului electric. Dacă regimul este variabil în timp, câmpului electric i se asociază inseparabil câmpul magnetic și împreună se condiționează reciproc, alcătuind *câmpul electromagnetic*. Câmpul electromagnetic este distinct de corpuri și există atât în interiorul corpurilor cât și în vidul din exteriorul lor; numai în regimuri statice, cele două laturi, electrică și magnetică se manifestă separat prin câmpul electric și câmpul magnetic. Câmpul electric este deci câmpul electromagnetic exclusiv din punctul de vedere al proprietăților lui electrice; câmpului electric îi sunt asociate regiunea din spațiu în care corpurile sunt acționate de forțe și cupluri de natură electrică și funcția de punct care-l caracterizează.

Câmpul electric în vid se studiază microscopic, măsurând în fiecare punct din câmp forța în mărime, direcție și sens, care acționează asupra unui corp de probă încărcat cu sarcină electrică.

În teoria microscopică a fenomenelor electrice și magnetice, vidul este considerat ca o stare de rarefiere limită a substanței corpurilor și în consecință un punct din vid se identifică în raport cu vecinătățile corporale. În acest sens, punctele din interiorul sau din exteriorul corpurilor se reperează prin razele lor vectoriale în raport cu originea unui sistem de referință aflat în imobilitate relativă față de corpurile din apropiere.

Utilizând experimentul idealizat descris în paragraful 2.2, se poate introduce și o mărime care să caracterizeze local starea câmpului electric produs în vid de sistemul de corpuri încărcate electric (electrizate) considerat.

Experimental se constată că în câmpul electric din vid, forța F_{qv} , care se exercită asupra unui corp de probă, depinde atât de sarcina electrică q care-l încarcă, cât și de poziția lui în câmp, definită de raza vectorială \mathbf{r} :

$$\mathbf{F}_{qv} = F_{qv}(q, \mathbf{r}) . \quad (2.2)$$

Introducem succesiv în punctul P, în care vrem să studiem câmpul o serie de corpuri de probă ale căror sarcini electrice au valorile q_1, q_2, \dots . Se măsoară valorile

corespunzătoare ale forțelor $\mathbf{F}_{q_1v}(\mathbf{P})$, $\mathbf{F}_{q_2v}(\mathbf{P})$, ... care acționează asupra corpurilor de probă. Experimental se constată că raportul dintre forța care acționează asupra unui corp de probă și sarcina acestuia nu depinde de starea electrică a micului corp de probă, ci numai de starea electrică locală a câmpului, adică (v. relația 2.1):

$$\frac{\mathbf{F}_{q_1v}(\mathbf{P})}{q_1} = \frac{\mathbf{F}_{q_2v}(\mathbf{P})}{q_2} = \dots = \mathbf{E}_v(\mathbf{P}). \quad (2.3)$$

Mărimea vectorială $\mathbf{E}_v(\mathbf{r})$ astfel introdusă caracterizează local câmpul electric în vid și se numește *intensitate a câmpului electric în vid*. Rezultă că prin măsurarea acțiunilor ponderomotoare ale câmpului electric în vid asupra corpurilor de probă încărcate cu sarcini electrice, se introduc inductiv două mărimi primitive: intensitatea câmpului electric în vid și sarcina electrică adevărată, legate prin relația:

$$\mathbf{F}_{qv}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = q\mathbf{E}_v(\mathbf{r}), \quad (2.4)$$

unde $\mathbf{F}_{qv}(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ este forța exercitată asupra unui corp punctiform, încărcat cu o sarcină q , atunci când este plasat într-un punct $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ din vid în care intensitatea câmpului electric este $\mathbf{E}_v(\mathbf{r})$.

Relația (2.4) se poate scrie sub forma:

$$\mathbf{E}_v(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_{qv}(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{q}. \quad (2.5)$$

Caracterul idealizat al experienței analizate se datorează faptului că, deoarece s-a urmărit caracterizarea locală a câmpului, corpul de probă ar fi trebuit să fie punctiform, ceea ce este practic imposibil, ca și faptului că acest corp își asociază un câmp electric propriu care perturbă starea de electrizare a corpurilor care produc câmpul inițial, astfel încât mărimea $\mathbf{E}_v(\mathbf{r})$ introdusă prin relația (2.5) corespunde de fapt câmpului modificat. Deoarece interesează numai caracterizarea câmpului inițial, ar trebui ca aportul câmpului propriu al corpului de probă să fie cât mai mic, ceea ce se poate realiza numai dacă sarcina sa electrică scade foarte mult. Ideal ar fi ca această contribuție să fie nulă, dar pentru aceasta trebuie ca și sarcina electrică să fie nulă, condiții în care experiența devine irealizabilă, deoarece, conform relației (2.4), odată cu sarcina se anulează și forța exercitată asupra corpului de probă. Prin trecere la limită idealizată, se poate considera intensitatea câmpului electric în vid definită prin relația:

$$\mathbf{E}_v(\mathbf{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_{qv}(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{q}. \quad (2.6)$$

Experiența arată că relația (2.6) stabilită prin analiza datelor experimentale, este verificată și în regim variabil în care atât sarcina electrică cât și intensitatea câmpului electric sunt variabile în timp. Deoarece pentru introducerea lui $\mathbf{E}_v(\mathbf{r})$ nu

s-a apelat la relații analitice, intensitatea câmpului electric în vid este o mărime primitivă, de stare locală și instantanee a câmpului electric în vid.

Din punctul de vedere al unității de măsură, relația (2.6) constituie o relație de definiție și deci intensitatea câmpului electric în vid $\mathbf{E}_v(\mathbf{r})$ este o mărime secundară.

În Sistemul Internațional de Unități (SI), unitatea lui E_v se numește *volt pe metru* (V/m) (v. par. 2.12.1) și este vectorul câmp electric în care asupra corpului punctiform cu sarcina electrică de un coulomb, acționează o forță egală cu un newton.

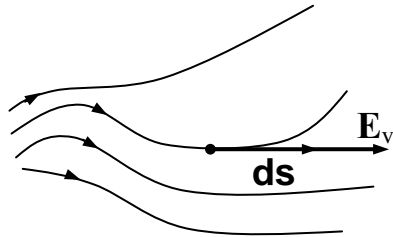


Fig. 2.1

Examinând câmpul electric, se poate determina intensitatea câmpului în toate punctele sale, după care se pot construi o serie de curbe astfel încât, în fiecare punct al lor, vectorul \mathbf{E}_v este orientat după tangentă și în același sens (fig. 2.1). Aceste curbe se numesc *liniile intensității câmpului electric* sau, pe scurt, *linii de câmp*. Acestea sunt

prevăzute cu săgeți care indică sensul vectorului \mathbf{E}_v . Sensul liniei de câmp este sensul de deplasare a particulei încărcate cu sarcină electrică pozitivă. Notând cu \mathbf{ds} elementul de lungime al liniei de câmp, orientat în sensul acesteia, relația

$$\mathbf{ds} \times \mathbf{E}_v = 0 \quad (2.7)$$

constituie ecuația diferențială a liniei de câmp electric.

Ansamblul liniilor de câmp formează *spectrul câmpului electric*. Liniile de câmp se trasează astfel încât prin fiecare unitate de arie transversală, numărul lor să fie proporțional cu modulul vectorului \mathbf{E}_v . Concentrarea liniilor de câmp indică domeniul de câmp intens. Deoarece, în fiecare punct vectorul \mathbf{E}_v este univoc determinat, liniile de câmp nu se intersectează. Câmpul electric se numește *omogen* sau *uniform* dacă în fiecare punct vectorul \mathbf{E}_v are aceeași valoare și orientare, liniile de câmp fiind paralele și echidistante (fig. 2.2).

Se consideră o curbă închisă Γ ; totalitatea liniilor de câmp prin punctele

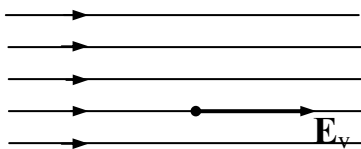


Fig. 2.2

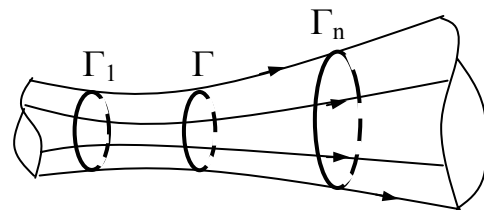


Fig. 2.3

curbei Γ alcătuiesc o suprafață S numită *tub de câmp* (fig. 2.3). Deoarece nici o linie de câmp nu înțeapă suprafața tubului de câmp, numărul liniilor de câmp prin orice secțiune transversală de contur $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ este același. Dacă aria secțiunii transversale este infinit mică, tubul se numește elementar.

2.4. SARCINA ELECTRICĂ A CORPURILOR FINITE

Se consideră un corp de dimensiuni finite introdus într-un câmp electric uniform E_v . Se măsoară forța F_q care se exercită asupra corpului și efectuând raportul dintre modulul forței și modulul vectorului câmp electric, se determină sarcina lui electrică, $q = \frac{F_q}{E_v}$.

2.4.1. Conservarea sarcinii electrice

Dacă unui corp încărcat inițial cu sarcină electrică pozitivă, i se transmite succesiv sarcină electrică negativă, se constată că sarcina electrică pozitivă a corpului se reduce treptat, apoi corpul devine neutru și în continuare se încarcă cu sarcină negativă. Rezultă că sarcinile electrice de semne opuse se compensează; chiar în stare neutră corpurile au sarcini electrice atât pozitive cât și negative, dar fiind în cantități egale, se neutralizează. Sarcina electrică pozitivă care încarcă un corp reprezintă excesul de sarcină pozitivă față de sarcina negativă și invers. Producerea sau suprimarea unei sarcini de un semn într-un sistem fizic izolat este însoțită de producerea sau suprimarea unei sarcini egale dar de semn opus. Prin fragmentarea unui corp încărcat cu sarcină electrică și izolat de exterior, suma sarcinilor care încarcă fragmentele corpului rămâne neschimbată. Aceasta este proprietatea de *conservare a sarcinii electrice* și constituie o formă particulară a unei proprietăți mai generală descrisă de legea de conservare a sarcinii electrice (v. par. 5.5.2).

Dacă într-un sistem fizic sarcinile electrice q_1, q_2, \dots, q_n , în general variabile în timp, satisfac condiția că în fiecare moment suma lor este nulă,

$$\sum_{k=1}^n q_k = 0, \quad (2.8)$$

ele alcătuiesc un *sistem complet de sarcini electrice*; dacă suma lor este nenulă, ele alcătuiesc un sistem incomplet de sarcini electrice. În aceste condiții, în acord cu proprietatea de conservare, prezența sarcinii electrice q într-un sistem fizic presupune existența unei sarcini $-q$ în sistemele fizice din exterior.

2.4.2. Distribuții de sarcină

Din punct de vedere microscopic, deoarece se admite că substanța este uniform distribuită în domeniul ocupat de un corp, atunci este necesar să se admită că și sarcina electrică este continuu distribuită în acel domeniu. În acest sens, noțiunea de sarcină a unui corp punctiform este o idealizare a realității fizice. Acest concept se folosește atunci când se studiază câmpul electric stabilit de un corp de dimensiuni mici, încărcat electric, în puncte aflate la distanțe mari față de el. Starea de încărcare electrică locală a unui corp și deci distribuția sarcinii electrice este caracterizată de mărimea scalară derivată numită *densitate de sarcină electrică*.

Dacă sarcina electrică este distribuită ocupând un volum, corpul este încărcat cu *sarcină electrică de volum*. Mărimea scalară ρ_v egală cu limita raportului dintre sarcina elementară Δq care încarcă elementul de volum Δv (fig. 2.4, a), și elementul de volum Δv , când acesta tinde către zero, se numește *densitate de volum (volică sau volumetrică) a sarcinii electrice*:

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv}. \quad (2.9)$$

Dacă sarcina este distribuită în volumul unui strat a cărui grosime este neglijabilă față de dimensiunile suprafeței stratului, corpul este încărcat cu *sarcină*

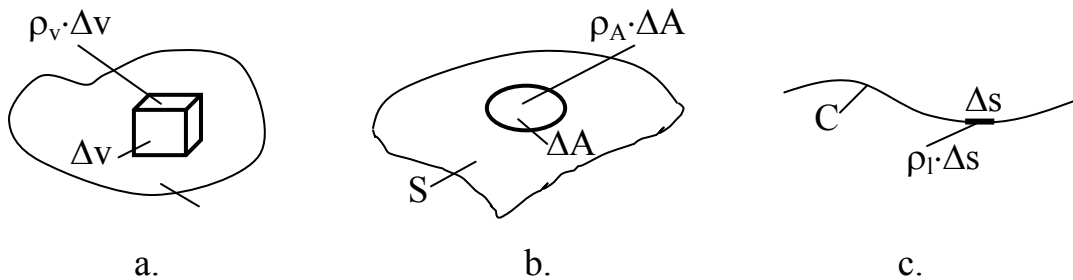


Fig. 2.4

electrică de suprafață. Similar se definește *densitatea de suprafață (sau superficială) a sarcinii electrice*, ρ_A , (fig. 2.4, b):

$$\rho_A = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} = \frac{dq}{dA}. \quad (2.10)$$

Dacă sarcina electrică este distribuită în volumul unui tub ale cărui dimensiuni transversale sunt neglijabile față de lungime, încât să poată fi considerat filiform, corpul (firul sau linia) este încărcat cu *sarcină electrică liniară (sau lineică)*, iar mărimea ρ_l (fig. 2.4, c) definită de relația

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds} \quad (2.11)$$

se numește *densitate de linie (sau lineică) a sarcinii electrice*.

Dacă sarcina electrică încarcă corpuri ale căror dimensiuni sunt neglijabile în raport cu distanțele care le separă, distribuția de sarcină este *punctiformă* sau *discretă*.

2.5. CÂMPUL ELECTROSTATIC ÎN VID PRODUS DE SARCINI ELECTRICE

Proprietățile electrice ale aerului fiind asemănătoare cu ale vidului, câmpul electrostatic stabilit în aer se poate aproxima cu cel din vid. Teoria câmpului

electrostatic în vid stabilit de sarcini electrice se elaborează pe baza experiențelor lui Coulomb, principiului acțiunii și reacțiunii și a principiului superpoziției efectelor.

2.5.1. Experiențele lui Coulomb

Se consideră sarcinile electrice q_1 și q_2 care încarcă două corpuri punctiforme situate în vid la distanța r (fig. 2.5). Forțele \mathbf{F}_{12} , respectiv \mathbf{F}_{21} care se exercită asupra primului corp, respectiv asupra celui de al doilea corp au următoarele proprietăți:

- satisfac principiul acțiunii și reacțiunii; forța \mathbf{F}_{21} pe care o exercită primul corp asupra celui de al doilea corp, este egală și de sens opus cu forța \mathbf{F}_{12} pe care o exercită cel de al doilea corp asupra primului, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$;
- dacă sarcinile sunt de același semn, forțele sunt de respingere, iar dacă sarcinile sunt de semne opuse, forțele sunt de atracție;
- în valoare absolută, forțele sunt proporționale cu produsul sarcinilor și invers proporționale cu pătratul distanței:

$$F_{12} = F_{21} = \Lambda_e \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (2.12)$$

unde: Λ_e este o constantă universală, referitor la proprietățile electrice ale vidului, având expresia: $\Lambda_e = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0}$; χ - coeficientul de raționalizare, egal cu 4π în sistemele de unități neraționalizate și cu unitatea în sistemele raționalizate; ϵ_0 - permitivitatea vidului.

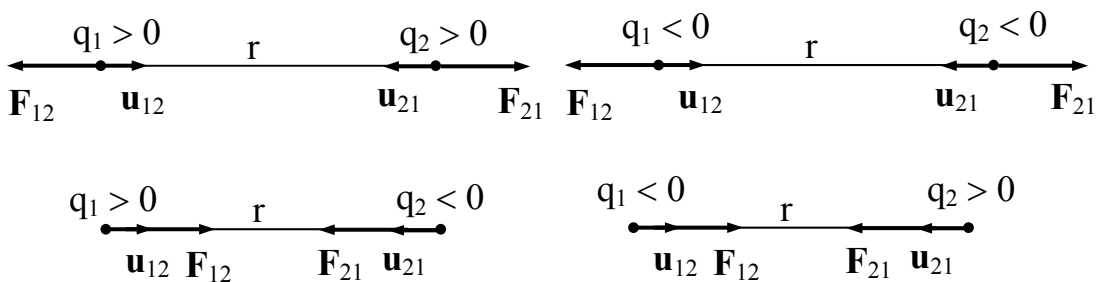


Fig. 2.5

Notând cu \mathbf{u}_{12} , respectiv \mathbf{u}_{21} versorii orientați de la corpul 1 către corpul 2, respectiv de la corpul 2 către corpul 1, forțele lui Coulomb \mathbf{F}_{12} și \mathbf{F}_{21} au următoarele expresii:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{u}_{21}; \quad \mathbf{F}_{21} = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r^2} \mathbf{u}_{12}. \quad (2.13)$$

Sistemul Internațional de Unități fiind raționalizat, $\chi = 1$, și ținând seama de definiția coulombului (v. par. 2.2), valoarea lui ϵ_0 se obține luând în (2.12): $r = 1\text{m}$, $q_1 = q_2 = 1\text{C}$, $F_{12} = F_{21} = 9 \cdot 10^9\text{N}$, adică

$$9 \cdot 10^9 \text{ N} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1\text{C} \cdot 1\text{C}}{1\text{m}^2},$$

de unde rezultă:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \frac{\text{Farad}}{\text{metru}}. \quad (2.14)$$

2.5.2. Câmpul electrostatic în vid al sarcinilor electrice punctiforme

În conformitate cu relația (2.4), forța \mathbf{F}_{12} este egală cu produsul dintre sarcina electrică q_1 și vectorul câmp electric în vid \mathbf{E}_{12} stabilit de sarcina electrică q_2 (fig. 2.5):

$$\mathbf{F}_{12} = q_1 \mathbf{E}_{12}. \quad (2.15)$$

Similar, forța \mathbf{F}_{21} este egală cu produsul dintre sarcina electrică q_2 și vectorul câmp electric în vid \mathbf{E}_{21} stabilit de sarcina q_1 (fig. 2.5):

$$\mathbf{F}_{21} = q_2 \mathbf{E}_{21}. \quad (2.16)$$

Luând $\chi = 1$, din relațiile (2.13), (2.15) și (2.16) se obține:

$$\mathbf{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r^2} \mathbf{u}_{21} \quad ; \quad \mathbf{E}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \mathbf{u}_{12}. \quad (2.17)$$

Rezultă că o sarcină electrică punctiformă q , situată în vid, stabilește într-un punct oarecare P situat la distanța r , un câmp electrostatic al cărui vector câmp \mathbf{E}_v

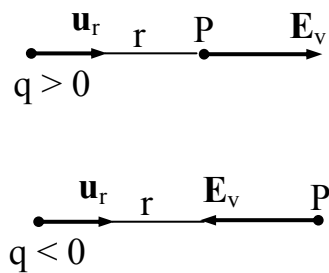


Fig. 2.6

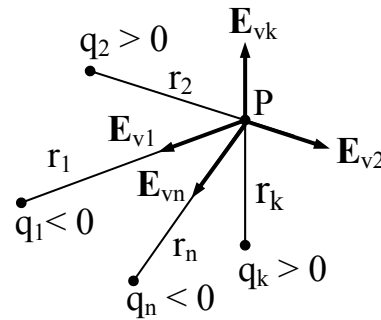


Fig. 2.7

este radial, proporțional cu sarcina q și invers proporțional cu pătratul distanței:

$$\mathbf{E}_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (2.18)$$

unde $\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ este versorul direcției \mathbf{r} .

Vectorul \mathbf{E}_v este orientat de la corpul punctiform spre infinit, dacă sarcina este pozitivă și către corp, dacă sarcina este negativă (fig. 2.6).

2.5.3. Câmpul electrostatic în vid al sarcinilor electrice distribuite

Dacă sarcina electrică este distribuită, intensitatea câmpului electric elementar $d\mathbf{E}_v$ stabilit de sarcina electrică elementară dq se calculează cu relația (2.18):

$$d\mathbf{E}_v = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.19)$$

Dacă sarcina electrică este distribuită în volumul v cu densitatea de volum ρ_v , sarcina elementară care încarcă elementul de volum dv este $dq = \rho_v dv$ și intensitatea câmpului electric \mathbf{E}_v se obține integrând relația (2.19) pe volumul v :

$$\mathbf{E}_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \rho_v \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv. \quad (2.20)$$

Dacă distribuția de sarcină elementară este superficială cu densitatea ρ_A , sau lineică cu densitatea ρ_l , în relația (2.19) se înlocuiește dq cu $\rho_A dA$, sau $\rho_l ds$ și vectorul \mathbf{E}_v se obține integrând relația (2.19) pe suprafața S sau pe linia C :

$$\mathbf{E}_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \rho_A \frac{\mathbf{r}}{r^3} dA; \quad \mathbf{E}_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \rho_l \frac{\mathbf{r}}{r^3} ds. \quad (2.21)$$

2.5.4. Principiul superpoziției

Câmpul electrostatic în vid satisface *principiul superpoziției*: intensitatea câmpului electric \mathbf{E}_v stabilită într-un punct din vid de n sarcini electrice punctiforme q_k , este egală cu suma vectorilor \mathbf{E}_{vk} , $k = 1, 2, \dots, n$, pe care i-ar produce în acel punct fiecare dintre sarcinile punctiforme (fig. 2.7):

$$\mathbf{E}_v = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}_{vk} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k^3} \mathbf{r}_k. \quad (2.22)$$

Dacă sarcinile sunt distribuite în volum, pe o suprafață, liniar și discret, intensitatea câmpului electric \mathbf{E}_v se calculează cu relația:

$$\mathbf{E}_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iiint_v \rho_v \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv + \iint_S \rho_A \frac{\mathbf{r}}{r^3} dA + \int_C \rho_l \frac{\mathbf{r}}{r^3} ds + \sum_{k=1}^n q_k \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} \right]. \quad (2.23)$$

2.6. TEOREMA LUI GAUSS

Se consideră o suprafață deschisă S_Γ care se sprijină pe curba închisă Γ prevăzută cu un sens de parcurgere, situată în câmpul electric al unei sarcini punctiforme (fig. 2.8). Suprafața S_Γ poate fi descompusă în elemente de suprafață dA ale căror contururi au sensul de parcurgere al curbei Γ . Elementele de suprafață

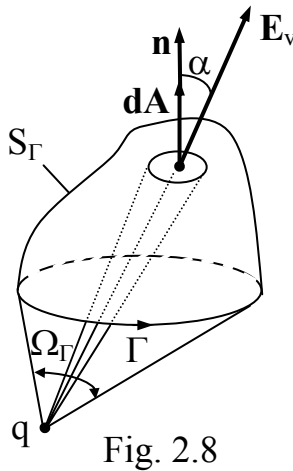


Fig. 2.8

dA sunt atât de mici încât suprafața fiecărui element este practic plană, iar vectorul câmp nu variază pe această suprafață. Elementul de suprafață are o mărime bine determinată și definește o direcție unică - cea a normalei pozitive \mathbf{n} la suprafața elementului, orientată în sensul de înaintare al burghiului drept care se rotește în sensul curbei Γ . Să reprezentăm această mărime și direcție printr-un vector; atunci, pentru fiecare element de suprafață există un vector $d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA$ care determină mărimea și orientarea elementului de suprafață. Fie \mathbf{E}_v vectorul intensitate câmp electric pe suprafața elementară $d\mathbf{A}$. Produsul scalar $\mathbf{E}_v d\mathbf{A}$ îl numim *fluxul vectorului câmp electric* prin elementul de

suprafață. Adunând fluxurile prin toate suprafețele elementare, se obține fluxul prin întreaga suprafață, o mărime scalară,

$$\sum_j \mathbf{E}_{vj} \cdot d\mathbf{A}_j . \quad (2.24)$$

Micșorând elementele de suprafață și măbind numărul lor la infinit, se trece de la suma (2.24) la integrala de suprafață:

$$\iint_{S_\Gamma} \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{A} = \iint_{S_\Gamma} \mathbf{E}_v \cdot \mathbf{n} dA . \quad (2.25)$$

Intensitatea câmpului electric \mathbf{E}_v , într-un punct pe suprafața S_Γ , situat la distanța r de punctul în care presupunem că este concentrată sarcina q , se calculează cu ajutorul relației (2.18):

$$\mathbf{E}_v = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} , \quad (2.26)$$

iar pentru fluxul vectorului câmp electric (2.25) se obține:

$$\iint_{S_\Gamma} \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{A} = \iint_{S_\Gamma} \mathbf{E}_v \cdot \mathbf{n} dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_\Gamma} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_\Gamma} \frac{dA \cos \alpha}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_\Gamma , \quad (2.27)$$

unde

$$\Omega_\Gamma = \iint_{S_\Gamma} \frac{dA \cos \alpha}{r^2} \quad (2.28)$$

este unghiul solid sub care se vede curba Γ din punctul în care este situată sarcina q .

Dacă sarcina electrică este distribuită și Ω_Γ este unghiul solid sub care se vede curba Γ din punctul în care este situată sarcina elementară dq , fluxul vectorului câmp electric prin suprafața S_Γ este:

$$\iint_{S_\Gamma} \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \Omega_\Gamma dq, \quad (2.29)$$

unde integrala se efectuează pe domeniul D (care poate fi un volum, o suprafață sau o linie) pe care este distribuită sarcina electrică.

Fie o suprafață închisă Σ de formă oarecare, trasată în câmpul electric al unei sarcini punctiforme q și $d\mathbf{A}$ elementul de suprafață considerat ca vector după normala \mathbf{n} , orientată din interiorul suprafeței spre exterior. Fluxul vectorului câmp electric prin suprafața Σ este mărimea scalară egală cu integrala de suprafață a produsului scalar dintre vectorul \mathbf{E}_v și elementul de suprafață $d\mathbf{A}$:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{A} = \oiint_{\Sigma} \mathbf{E}_v \cdot \mathbf{n} dA. \quad (2.30)$$

Se consideră că sarcina electrică q este situată în exteriorul suprafeței închise Σ (fig. 2.9). Conul cu vârful în punctul în care se găsește sarcina punctiformă ale cărei generatoare sunt tangente suprafeței Σ determină o curbă Γ care separă două

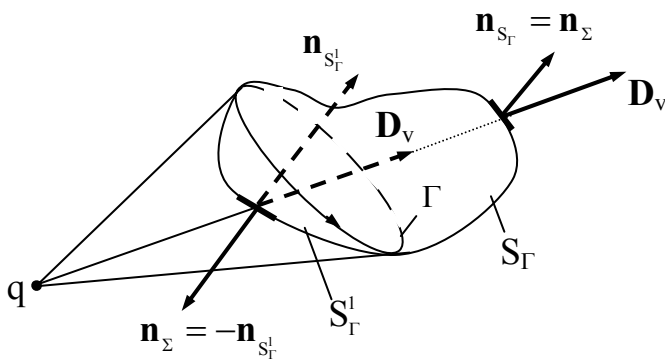


Fig. 2.9

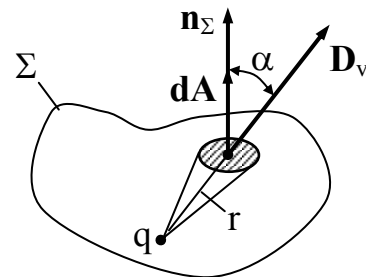


Fig. 2.10

suprafețe deschise S_Γ și S_Γ^1 ($S_\Gamma \cup S_\Gamma^1 = \Sigma$). Considerând un sens arbitrar de referință pe curba Γ , versorul normal al suprafeței deschise S_Γ este identic cu versorul suprafeței Σ , $\mathbf{n}_{S_\Gamma} = \mathbf{n}_\Sigma$, iar versorul suprafeței deschise S_Γ^1 are sens opus, $\mathbf{n}_{S_\Gamma^1} = -\mathbf{n}_\Sigma$. Ca urmare, $\Omega_{S_\Gamma} = -\Omega_{S_\Gamma^1}$ și deci unghiul solid din punctul exterior suprafeței Σ în care se află sarcina q este nul: $\Omega_\Sigma = \Omega_{S_\Gamma} + \Omega_{S_\Gamma^1} = 0$, iar fluxul vectorului \mathbf{E}_v prin suprafața închisă Σ este, de asemenea, nul,

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{A} = \oiint_{\Sigma} \mathbf{E}_v \cdot \mathbf{n} \, dA = 0. \quad (2.31)$$

Dacă sarcina electrică punctiformă q este situată în interiorul suprafeței închise Σ (fig. 2.10), fluxul vectorului câmp electric prin suprafața Σ este:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{A} = \oiint_{\Sigma} \mathbf{E}_v \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} \, dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\Sigma} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}}{r^3} \, dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\Sigma} \frac{dA \cos \alpha}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_{\Sigma}, \quad (2.32)$$

unde

$$\Omega_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} \frac{dA \cos \alpha}{r^2} = 4\pi \quad (2.33)$$

este unghiul solid sub care se vede suprafața Σ din punctul în care este situată sarcina q . Prin urmare, pentru fluxul vectorului câmp electric prin suprafața închisă Σ se obține:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{A} = \oiint_{\Sigma} \mathbf{E}_v \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} \, dA = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.34)$$

În cazul sarcinii distribuite, fluxul vectorului câmp electric are expresia:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \Omega_{\Sigma} \, dq = \frac{1}{\epsilon_0} \int_D dq = \frac{q_{\Sigma}}{\epsilon_0}, \quad (2.35)$$

în care integrala se efectuează pe domeniul D pe care este distribuită sarcina electrică, iar q_{Σ} este sarcina electrică din interiorul suprafeței închise Σ trasată exclusiv prin vid.

Relația (2.35) constituie *forma integrală a teoremei lui Gauss*. Teorema lui Gauss relevă legătura dintre câmp și sursele sale, în mod opus teoremei lui Coulomb. Teorema lui Coulomb spune cum se determină câmpul electric atunci când sunt date sarcinile. Cu ajutorul teoremei lui Gauss se poate determina sarcina electrică într-o regiune oarecare dacă se cunoaște câmpul.

2.6.1. Inducția electrică în vid. Fluxul electric în vid

Relația (2.35) se mai poate scrie sub forma:

$$\oiint_{\Sigma} \epsilon_0 \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{A} = \oiint_{\Sigma} \mathbf{D}_v \cdot d\mathbf{A} = q_{\Sigma}, \quad (2.36)$$

unde mărimea vectorială

$$\mathbf{D}_v = \epsilon_0 \mathbf{E}_v \quad (2.37)$$

se numește *inducție electrică în vid*.

Conform relației (2.36), unitatea de măsură a inducției electrice se numește *coulomb pe metru pătrat* (C/m^2).

Mărimea scalară egală cu integrala de suprafață a produsului scalar dintre vectorul inducție electrică \mathbf{D}_v și elementul de suprafață $\mathbf{n}dA$, cu simbolul Ψ_{S_Γ} dacă suprafața este deschisă și cu simbolul Ψ_Σ dacă suprafața este închisă, se numește *flux electric*,

$$\Psi_{S_\Gamma} = \iint_{S_\Gamma} \mathbf{D}_v \cdot \mathbf{n} dA ; \Psi_\Sigma = \oiint_{\Sigma} \mathbf{D}_v \cdot \mathbf{n} dA . \quad (2.38)$$

Fluxul electric este o mărime derivată, având aceeași dimensiune cu sarcina electrică (v. relația 2.36); în sistemul de unități SI, unitatea de măsură este *coulombul* (C).

2.7. STAREA DE POLARIZARE ELECTRICĂ. MOMENTUL ELECTRIC

Spre deosebire de conductoare, care se electrizează numai prin încărcare cu sarcină electrică, dielectricii se pot electriza atât prin încărcare cât și prin polarizare.

Experiența arată că asupra unui corp dintr-un material dielectric, un câmp electric exterior exercită acțiuni ponderomotoare și, la rândul lui, produce un câmp electric propriu. Această stare de electrizare a corpului se numește *stare de polarizare electrică*.

În modul cel mai simplu, această stare se poate realiza prin introducerea unui corp din material dielectric într-un câmp electric exterior. În acest caz, starea de polarizare dispare odată cu anularea câmpului, printr-un proces tranzitoriu de revenire în starea nepolarizată. Acest tip de polarizare se numește *polarizare temporară*.

Starea de polarizare poate apărea și ca rezultat al unor acțiuni de natură neelectrică, fiind independentă de existența unui câmp electric exterior. Acest tip de polarizare se numește *polarizare permanentă* și se poate realiza prin procedee cum sunt, de exemplu, încălzirea (polarizarea piroelectrică), comprimarea (polarizarea piezoelectrică), topirea și solidificarea în câmp electric exterior suficient de intens (polarizarea de electret).

2.7.1. Momentul electric

Pentru investigarea stării de polarizare electrică, se studiază acțiunile ponderomotoare pe care un câmp electric invariabil în timp le exercită în vid asupra unui mic corp aflat în această stare. Experimental se constată că dacă acesta este situat într-un câmp electric uniform în lipsa corpului și orientat potrivit față de vectorul \mathbf{E}_v , asupra corpului acționează un cuplu; dacă este situat într-un câmp neuniform și este orientat potrivit față de neuniformitatea locală a câmpului, asupra corpului acționează atât un cuplu cât și o forță.

Din analiza cantitativă a experimentului, se ajunge la concluzia că asupra corpului situat într-un câmp uniform acționează un cuplu care poate fi exprimat prin relația (fig. 2.11):

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_v. \quad (2.39)$$

Mărimea vectorială \mathbf{p} care caracterizează global starea de polarizare electrică a micului corp se numește *moment electric*. Deoarece s-a introdus exclusiv prin interpretarea datelor experimentale, momentul electric este o mărime primitivă.

Orientarea care trebuie dată micului corp pentru ca acest cuplu să fie nul, corespunde situației în care direcția câmpului este paralelă cu o axă particulară a corpului care reprezintă direcția vectorului \mathbf{p} și care se numește *axă de polarizare*. Sensul vectorului \mathbf{p} coincide cu sensul de pe axa de polarizare, care se suprapune cu sensul câmpului electric în vid, la anularea cuplului, în urma rotirii libere a micului corp polarizat (echilibrul stabil). Măsurarea cuplului maxim, care se exercită în situația în care axa de polarizare a micului corp este perpendiculară pe

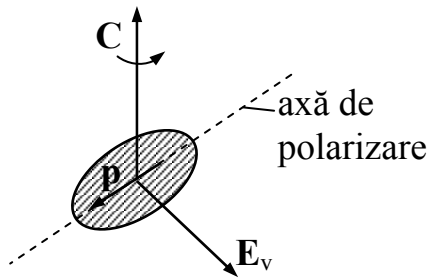


Fig. 2.11

direcția câmpului, și precizarea ordinei în care se scrie produsul vectorial din relația (2.39) permite determinarea completă a vectorului \mathbf{p} . În experiența descrisă mai sus, s-a considerat că micul corp supus experienței trebuie să fie polarizat permanent (pentru ca această stare să nu varieze la rotirea corpului în câmp). Rezultatul obținut se poate generaliza inductiv și pentru cazul în care corpul este polarizat temporar. Momentul electric total \mathbf{p} al micului corp polarizat este suma unui moment electric \mathbf{p}_p corespunzător unei polarizări permanente și a unui moment electric \mathbf{p}_t , corespunzător unei polarizări temporare:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_t(\mathbf{E}_v). \quad (2.40)$$

Dacă micul corp polarizat electric, de moment electric \mathbf{p} , este situat într-un câmp electric staționar și local neuniform, asupra acestuia se exercită și o forță care se poate exprima prin relația [10]:

$$\mathbf{F}_p = (\mathbf{p} \text{ grad}) \mathbf{E}_v = \text{grad} \left(\mathbf{p} \mathbf{E}_v \right), \quad (2.41)$$

unde săgeata \downarrow indică mărimea care se derivează, momentul electric \mathbf{p} fiind constant.

Într-un sistem de coordonate carteziene, relația (2.41) devine:

$$F_{p_i} = p_x \frac{\partial E_{v_i}}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_{v_i}}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_{v_i}}{\partial z}, \quad i = x, y, z. \quad (2.42)$$

Măsurând componentele F_{p_i} ale forței pentru o poziție dată a corpului, iar câmpul electric fiind cunoscut, relațiile (2.42) permit determinarea celor trei componente p_x, p_y, p_z ale momentului electric.

Oricare din cele două relații (2.39) sau (2.41) permite introducerea momentului electric \mathbf{p} , însă se utilizează de obicei relația pentru cuplu.

Deoarece produsul scalar $\mathbf{p}\mathbf{E}_v$ crește cu modulul lui \mathbf{E}_v , urmează că forța \mathbf{F}_p tinde să deplaseze corpul spre regiunile unde câmpul este mai intens. În câmp electric uniform forța \mathbf{F}_p este nulă, ceea ce a permis definirea sarcinii electrice a corpurilor finite. Prin aducerea unui corp de dimensiuni finite și polarizat electric într-un câmp electric uniform, forța datorată stării de polarizare a corpului este nulă și o eventuală forță care s-ar exercita asupra corpului, s-ar datora exclusiv sarcinii lui electrice.

Dacă un mic corp polarizat electric și imobil, având moment electric \mathbf{p} și încărcat cu sarcina electrică q , este situat într-un punct din vid, în care câmpul electric \mathbf{E}_v este local neuniform, asupra lui se exercită următoarele acțiuni ponderomotoare:

- o forță care conține o componentă datorată sarcinii electrice q , de forma $q\mathbf{E}_v$ și o componentă datorată polarizării lui electrice, de forma (2.41):

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}_v + (\mathbf{p} \text{ grad})\mathbf{E}_v; \quad (2.43)$$

- un cuplu care conține o componentă datorată forței \mathbf{F}_{qv} și o componentă de forma (2.39):

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{r} \times q\mathbf{E}_v + \mathbf{p} \times \mathbf{E}_v, \quad (2.44)$$

unde \mathbf{r} este raza vectorială a punctului în care se află corpul în raport cu originea referențialului.

În sistemul de unități SI, unitatea de moment electric este egală cu produsul dintre unitatea de sarcină electrică și unitatea de lungime și se numește *coulomb – metru* (Cm) (v. par. 2.8, relația 2.49).

2.7.2. Polarizația electrică

Starea de polarizare electrică a unui corp foarte mic este complet caracterizată de momentul său electric. Momentul electric \mathbf{p} este însă insuficient

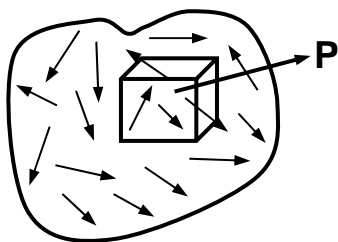


Fig. 2.12

pentru a descrie complet și starea de polarizare a corpurilor masive polarizate. Descrierea locală a stării de polarizare a unui corp masiv polarizat necesită introducerea unei mărimi derivate numită *polarizație electrică*.

Prin fragmentarea corpului finit, polarizat electric, fiecare fragment de volum Δv are un moment electric elementar $\Delta\mathbf{p}$. În acord cu principiul localizării acțiunilor fizice, starea de polarizare electrică a unui corp finit se caracterizează local prin mărimea vectorială \mathbf{P} egală cu limita

raportului dintre momentul electric elementar $\Delta \mathbf{p}$ și elementul de volum Δv , când acesta tinde către zero (fig. 2.12),

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta v} = \frac{d\mathbf{p}}{dv}, \quad (2.45)$$

numită *polarizație electrică*, egală cu densitatea de volum a momentului electric.

Din relația (2.45) rezultă că momentul electric rezultat \mathbf{p} al corpului este egal cu integrala polarizației \mathbf{P} efectuată pe volumul v al corpului,

$$\mathbf{p} = \iiint_v \mathbf{P} dv. \quad (2.46)$$

Liniile electrice ale polarizației electrice sunt situate în întregime în interiorul corpurilor. În figura 2.13 sunt reprezentate liniile de câmp ale unei sfere uniform polarizată electric.

Pentru toți dielectricii, experiența pune în evidență o dependență mai mare sau mai mică a stării lor de polarizare de câmpul electric în care se găsesc situați.

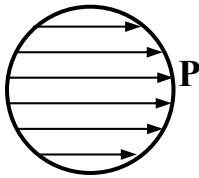


Fig. 2.13

Dielectricii al căror moment electric se anulează după suprimarea câmpului electric în care au fost aduși se numesc cu polarizare electrică temporară, iar mărimile care îi caracterizează sunt *momentul electric temporar* \mathbf{p}_t și *polarizația electrică temporară* \mathbf{P}_t .

Dielectricii care prezintă o polarizare electrică chiar și în lipsa unui câmp electric din exteriorul lor, produsă de factori neelectrici, se numesc cu polarizare electrică permanentă. Mărimile care caracterizează polarizarea electrică permanentă sunt *momentul electric permanent* \mathbf{p}_p și *polarizația electrică permanentă* \mathbf{P}_p .

În general, momentul electric \mathbf{p} al unui mic corp polarizat electric este egal cu suma dintre o componentă temporară \mathbf{p}_t și o componentă permanentă \mathbf{p}_p (relația 2.40). Separarea celor două componente este unică numai dacă termenul \mathbf{p}_p este independent de \mathbf{E}_v , iar termenul \mathbf{p}_t se anulează odată cu \mathbf{E}_v . Relației (2.40) îi corespunde relația similară pentru polarizații:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_t(\mathbf{E}), \quad (2.47)$$

unde \mathbf{E} este intensitatea câmpului electric în corpurile.

În sistemul de unități SI, unitatea de polarizație electrică se numește *coulomb pe metru pătrat* (C/m^2) și este egală cu polarizația electrică a unui corp uniform polarizat, care pe un metru cub are un moment electric egal cu un coulomb – metru.

2.8. MODELUL DIPOLAR AL DIELECTRICILOR POLARIZAȚI

Dielectricii sunt substanțe care nu conțin particule microscopice libere încărcate cu sarcină electrică, care să se poată deplasa la distanțe apreciabile față

de anumite poziții de echilibru. Dielectricii sunt substanțe solide, lichide sau gazoase formate din sisteme de sarcini electrice neutre în ansamblu pentru mici domenii, adică suma sarcinilor electrice din interiorul acestor domenii este nulă,

$$\sum_{k=1}^n q_k = 0. \quad (2.48)$$

Din punct de vedere al repartiției sarcinilor electrice, dielectricii pot fi împărțiți în trei grupe:

- dielectrici constituiți din particule grupate în molecule neutre. În această grupă intră toți dielectricii gazoși și lichizi precum și o parte din cei solizi;
- dielectrici care, în afară de particule grupate în molecule neutre, conțin și ioni fixați în anumite poziții de echilibru, de exemplu în nodurile rețelei cristaline a corpului. Rețelele cristaline ionice sunt alcătuite din domenii elementare, iar fiecare domeniu este încărcat cu sarcini electrice pozitive și negative egale în valoare absolută, astfel încât domeniul apare în ansamblu ca neutru. Acesta este cazul dielectricilor cristalini, cum sunt: cuarțul, mica etc.;
- dielectrici care conțin în afară de molecule neutre și molecule încărcate cu sarcini electrice pozitive și negative egale în valoare absolută, denumite molecule dipolare. Din această categorie fac parte: celuloza, masele plastice termoreactive, sticla, masele sticloase etc.

Spre deosebire de substanțele conductoare în care există un număr suficient de particule elementare cu sarcină liberă, în substanțele dielectrice practic toate particulele elementare cu sarcină sunt legate prin forțe interatomice, sau intermoleculare și nu pot părăsi sistemele de particule (atomi, molecule, ioni) din care fac parte. De aceea, aceste particule sunt denumite *particule legate*, iar sarcinile electrice corespunzătoare, *sarcini electrice legate*.

Sub acțiunea unui câmp electric exterior, particulele încărcate cu sarcini electrice legate nu sunt smulse de la locul lor, ci se deplasează din pozițiile lor de echilibru în alte poziții de echilibru apropiate. Astfel, sarcinile pozitive se deplasează în sensul câmpului, iar sarcinile negative în sens contrar, fără a părăsi sistemele neutre pe care le formează. Ca urmare se modifică repartiția în spațiu a sarcinilor electrice ale dielectricului. Starea nouă în care se află dielectricul este numită *stare de polarizare electrică*, iar fenomenul respectiv este denumit *polarizare electrică*.

Există o serie de substanțe ale căror molecule, în absența unui câmp electric exterior, sunt electric neutre, adică sarcinile care intră în componența unei asemenea molecule, în medie, nu produc câmp electric în spațiul exterior moleculei. O asemenea stare este posibilă, deoarece electronii care se rotesc cu viteze mari pe orbitele lor din interiorul atomilor, în spațiul exterior sunt sesizați ca fiind în centrul orbitei și se poate întâmpla ca centrul acțiunii electrice a tuturor electronilor din moleculă să coincidă cu centrul acțiunii nucleelor pozitive. Să examinăm comportarea moleculelor și atomilor unor asemenea corpuri în câmp electric exterior, luând ca exemplu atomul cel mai simplu, atomul de hidrogen, al cărui model este redat schematic în figura 2.14, a. În jurul nucleului pozitiv

(proton) se rotește pe orbita sa electronul negativ. În spațiul exterior, câmpurile lor se compensează reciproc. Dacă atomul se află într-un câmp electric exterior, protonul și electronul vor fi supuși acțiunii forțelor F_1 și F_2 (fig. 2.14, b), care acționează în sensuri opuse. În urma acțiunii acestor forțe, orbita electronului se deformează și se deplasează în raport cu nucleul. Acum centrele acțiunilor electrice a electronului și protonului nu vor mai coincide și în spațiul exterior atomul va fi sesizat ca un sistem format din două sarcini electrice punctiforme egale și de

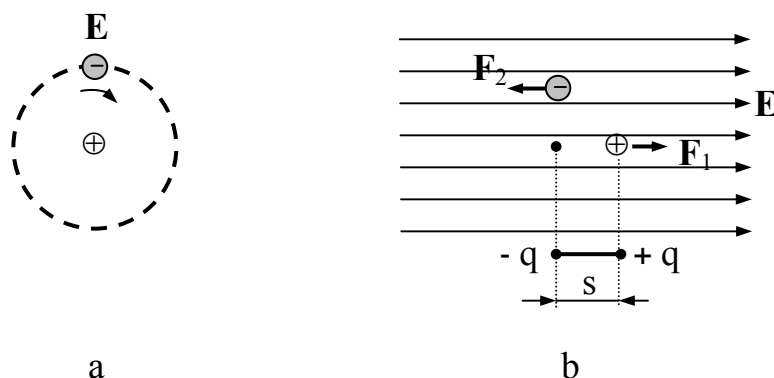


Fig. 2.14

semne opuse, q și $-q$, deplasate una față de alta cu distanța s , considerată ca vector cu orientarea de la sarcina negativă către sarcina pozitivă. Acest sistem se numește *dipol electric*. Mărimea vectorială

$$\mathbf{p}_d = q \mathbf{s} \quad (2.49)$$

se numește *momentul dipolului electric*. Datorită forțelor de atracție dintre electron și nucleu, deplasarea s este foarte mică, practic proporțională cu intensitatea câmpului electric exterior. Dacă intensitatea câmpului electric exterior se anulează, dipolul dispare. Din acest motiv, se spune că dipolul obținut este *cvasielestic*. O deformație având caracter analog cu deformația pe care o suferă atomul de hidrogen în câmpul electric, o suferă și atomii și moleculele cu o construcție mai complicată. Sub acțiunea câmpului electric exterior, toate particulele cu sarcini pozitive care intră în componența moleculei se deplasează în sensul câmpului, iar toate particulele cu sarcini negative, în sens opus. Ca urmare, fiecare moleculă se transformă într-un dipol și dielectricul ajunge în stare polarizată. Momentul electric al fiecărui dipol este paralel și de același sens cu intensitatea câmpului electric exterior. Vectorul polarizație electrică \mathbf{P} , adică suma momentelor electrice din unitatea de volum, este de asemenea proporțional, paralel și de același sens cu intensitatea câmpului electric exterior. Deoarece, în cazul descris, fenomenul de polarizare electrică rezultă dintr-o deformare intramoleculară, acest tip de polarizare este numită *polarizare de deformare*, sau *polarizare diaelectrică*. Substanțele la care predomină polarizarea de deformare sunt denumite substanțe *diaelectrice*.

Există o altă clasă de substanțe dielectrice, ale căror molecule au moment electric diferit de zero chiar în lipsa unui câmp electric exterior. Astfel de molecule se numesc *molecule polare*. De exemplu, HCl ale căror molecule sunt formate de

ionul pozitiv al hidrogenului și ionul negativ al clorului, situați la o anumită distanță unul față de altul, se comportă ca niște dipoli. În lipsa unui câmp electric exterior, mișcarea de agitație termică produce o așezare dezordonată a moleculelor polare, astfel încât într-un element de volum, suma momentelor electrice ale moleculelor este nulă. În prezența unui câmp electric exterior, dipolii vor tinde să ocupe o poziție în care axele lor să fie orientate de-a lungul liniilor câmpului electric. Acestei așezări ordonate i se opune însă agitația termică. Ca urmare se va produce numai o oarecare rotire a dipolilor în direcția câmpului. În acest caz, polarizația este egală cu suma momentelor electrice ale dipolilor din unitatea de volum. La efectul de orientare a axelor dipolilor se adaugă, de regulă, și efectul de deformare a moleculelor. Experiența arată că polarizația dielectricilor cu molecule polare este proporțională cu intensitatea câmpului electric exterior.

Deoarece, în cazul descris, polarizarea electrică rezultă dintr-o orientare a moleculelor, acest tip de polarizare este numit *polarizare de orientare* sau *polarizare paraelectrică*. Substanțele la care predomină polarizarea de orientare sunt denumite *substanțe paraelectrice*.

2.8.1. Dipolul electric

Sistemul format din două sarcini electrice punctiforme egale și de semne opuse q_d și $-q_d$, situate la o distanță finită s , considerată ca vector cu orientarea de la corpul cu sarcină negativă către cel cu sarcină pozitivă, se numește *dipol electric* sau dublet de sarcină electrică, de lungime finită (fig. 2.15). Sarcinile electrice q_d și $-q_d$ se numesc *sarcini electrice dipolare*, iar distanța s dintre ele, lungimea dipolului. Dacă lungimea dipolului tinde către zero, iar sarcina dipolară crește la infinit, încât la limită produsul lor este finit,

$$\lim_{q_d \rightarrow \infty, s \rightarrow 0} (q_d \mathbf{s}) = \mathbf{p}_d, \quad (2.50)$$

sistemul se numește *dipol electric elementar*. Mărimea vectorială \mathbf{p}_d se numește *moment dipolar* sau *momentul dipolului electric*.

Fie P un punct situat la distanțele r_1 , r_2 de sarcinile $+q_d$, respectiv $-q_d$ și la distanța r de punctul M, unde M este mijlocul distanței dintre cele două sarcini (fig. 2.15). Aplicând principiul suprapunerii efectelor, intensitatea câmpului electrostatic în punctul P din vid este dat de relația:

$$\mathbf{E}_{vd} = \frac{q_d}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right), \quad (2.51)$$

unde, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}$; $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}$.

Dezvoltând funcțiile $\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} = f(\mathbf{r}_1) = f\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}\right)$ și $\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} = f(\mathbf{r}_2) = f\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}\right)$ în serie

Taylor și reținând numai primii doi termeni, se obține:

$$\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} = f(\mathbf{r}_1) = f\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \left(\frac{\mathbf{s}}{2} \text{grad}\right) \frac{\mathbf{r}}{r^3}; \quad (2.52)$$

$$\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} = f(\mathbf{r}_2) = f\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \left(\frac{\mathbf{s}}{2} \text{grad}\right) \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.53)$$

Înlocuind expresiile (2.52) și (2.53) în relația (2.51), rezultă:

$$\mathbf{E}_{\text{vd}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (q_d \mathbf{s} \text{grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{p}_d \text{grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.54)$$

Deoarece momentul dipolului este un vector constant, relația (2.54) se poate scrie

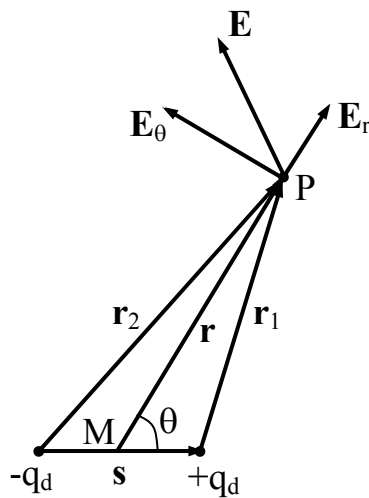


Fig. 2.15

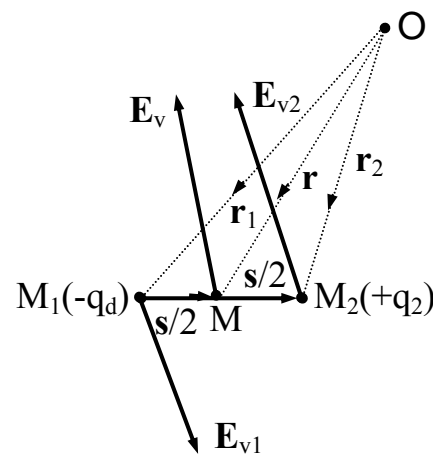


Fig. 2.16

sub forma următoare :

$$\mathbf{E}_{\text{vd}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \left(\frac{\mathbf{p}_d \mathbf{r}}{r^3} \right). \quad (2.55)$$

Într-un sistem de coordonate sferice (r, θ, φ) cu originea în centrul dipolului și axa Oz în lungul dipolului, componentele E_{vr} , $E_{\text{v}\theta}$ și $E_{\text{v}\varphi}$ se determină cu relațiile [10]:

$$E_{\text{vr}} = \frac{p_d \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}; \quad E_{\text{v}\theta} = \frac{p_d \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad E_{\text{v}\varphi} = 0. \quad (2.55,a)$$

Pentru a calcula forța care se exercită asupra dipolului aflat în câmp electric, se presupune că în punctele M_1 , M_2 , M , intensitatea câmpului în care este introdus dipolul este $\mathbf{E}_{\text{v}1}$, $\mathbf{E}_{\text{v}2}$ și respectiv \mathbf{E}_{v} (fig. 2.16). Fie $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{s}/2$ și $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \mathbf{s}/2$ razele vectoriale ale pozițiilor celor două sarcini punctiforme ale dipolului. Dezvoltând în serie Taylor vectorii $\mathbf{E}_{\text{v}1}$ și $\mathbf{E}_{\text{v}2}$ și reținând numai primii doi termeni, se obține:

$$\mathbf{E}_{v1} = \mathbf{E}_v(\mathbf{r} - \mathbf{s}/2) \cong \mathbf{E}_v - \left(\frac{\mathbf{s}}{2} \text{grad}\right) \mathbf{E}_v; \quad (2.56)$$

$$\mathbf{E}_{v2} = \mathbf{E}_v(\mathbf{r} + \mathbf{s}/2) \cong \mathbf{E}_v + \left(\frac{\mathbf{s}}{2} \text{grad}\right) \mathbf{E}_v. \quad (2.57)$$

Forțele care se exercită asupra dipolului au expresiile:

$$\mathbf{F}_{qv1} = -q_d \mathbf{E}_{v1} \cong -q_d \mathbf{E}_v + q_d \left(\frac{\mathbf{s}}{2} \text{grad}\right) \mathbf{E}_v; \quad (2.58)$$

$$\mathbf{F}_{qv2} = -q_d \mathbf{E}_{v2} \cong q_d \mathbf{E}_v + q_d \left(\frac{\mathbf{s}}{2} \text{grad}\right) \mathbf{E}_v. \quad (2.59)$$

Forța rezultantă \mathbf{F}_d asupra dipolului este egală cu suma forțelor \mathbf{F}_{qv1} și \mathbf{F}_{qv2} :

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{F}_{qv1} + \mathbf{F}_{qv2} = (q_d \mathbf{s} \text{grad}) \mathbf{E}_v = (\mathbf{p}_d \text{grad}) \mathbf{E}_v. \quad (2.60)$$

Cuplul \mathbf{C}_d raportat la centrul dipolului este:

$$\mathbf{C}_d = \frac{\mathbf{s}}{2} \times \mathbf{F}_{qv2} + \left(-\frac{\mathbf{s}}{2}\right) \times \mathbf{F}_{qv1} = \frac{\mathbf{s}}{2} \times q_d \mathbf{E}_v + \frac{\mathbf{s}}{2} \times q_d \mathbf{E}_v = q_d \mathbf{s} \times \mathbf{E}_v = \mathbf{p}_d \times \mathbf{E}_v. \quad (2.61)$$

Acest cuplu are tendința de a roti dipolul astfel încât sarcina pozitivă se deplasează în sensul câmpului, iar sarcina negativă în sens contrar câmpului.

2.8.2. Teorema echivalenței dintre un mic corp polarizat electric și un dipol electric elementar

Un mic corp polarizat electric și un dipol electric având momentele electric \mathbf{p} și dipolar \mathbf{p}_d egale,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_d, \quad (2.62)$$

sunt echivalente atât din punctul de vedere al acțiunilor ponderomotoare care se exercită asupra lor dacă sunt situate în câmp electric, cât și al câmpului electric pe care îl produc în vidul din exteriorul lor.

În câmp electric uniform, asupra unui mic corp polarizat electric, de moment \mathbf{p} , se exercită un cuplu \mathbf{C}_p , iar în câmp neuniform se exercită și o forță \mathbf{F}_p , care se calculează cu relațiile (2.39), respectiv (2.41):

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_v; \quad \mathbf{F}_p = \text{grad} \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_v \right) = (\mathbf{p} \text{grad}) \mathbf{E}_v. \quad (2.63)$$

În același câmp electric, conform relațiilor (2.60) și (2.61), acțiunile ponderomotoare la care este supus un dipol electric sunt:

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{p}_d \times \mathbf{E}_v; \quad \mathbf{F}_d = (\mathbf{p}_d \text{grad}) \mathbf{E}_v. \quad (2.64)$$

Dacă $\mathbf{p} = \mathbf{p}_d$ (2.62), rezultă:

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{C}_d ; \mathbf{F}_p = \mathbf{F}_d , \quad (2.65)$$

ceea ce demonstrează prima parte a teoremei.

Pentru a demonstra cea de a doua parte a teoremei, se consideră cazul particular al introducerii unei sarcini punctiforme q în câmpul unui mic corp polarizat electric, respectiv în câmpul unui dipol (fig. 2.17). În cele două cazuri, asupra sarcinii punctiforme q se exercită forțele:

$$\mathbf{F}'_{qv} = q \mathbf{E}_{vp} ; \quad \mathbf{F}''_{qv} = q \mathbf{E}_{vd} , \quad (2.66)$$

unde \mathbf{E}_{vp} este intensitatea câmpului electric produs de micul corp polarizat, iar \mathbf{E}_{vd} este intensitatea câmpului electric produs de dipol.

Pe de altă parte, în câmpul electric produs de sarcina q , asupra micului corp

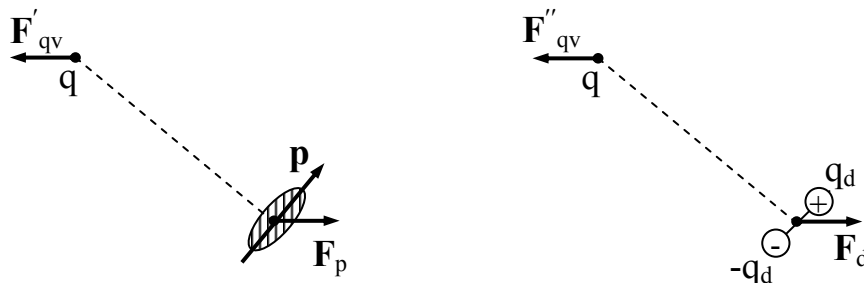


Fig. 2.17

polarizat acționează forța \mathbf{F}_p , iar asupra dipolului forța \mathbf{F}_d . Conform principiului acțiunii și reacțiunii, $\mathbf{F}'_{qv} = \mathbf{F}_p$, $\mathbf{F}''_{qv} = \mathbf{F}_d$ și ținând seama de (2.65₂), rezultă:

$$\mathbf{F}'_{qv} = \mathbf{F}''_{qv} , \quad (2.67)$$

sau

$$\mathbf{E}_{vp} = \mathbf{E}_{vd} , \quad (2.68)$$

ceea ce demonstrează și a doua parte a teoremei.

Teorema de echivalență este utilă în tratarea câmpului electric în dielectrici; un corp masiv polarizat electric poate fi divizat în mici corpuri polarizate, iar acestea la rândul lor pot fi substituite prin dipoli echivalenți. Deci problema câmpului poate fi tratată ca și cum aceasta ar fi în vid. Ca urmare, se pot utiliza toate metodele de tratare a câmpului electrostatic în vid. Câmpul electric într-un punct, în prezența unei substanțe, poate fi calculat prin aplicarea principiului superpoziției luând în considerare corpurile încărcate cu sarcini electrice (adevărate) cât și sarcinile electrice dipolare rezultate din substituirea substanței printr-un ansamblu de dipoli electrice elementari.

2.8.3. Câmpul corpurilor polarizate electric

Relația (2.55) permite calculul intensității câmpului electric produs de un mic corp polarizat, înlocuind \mathbf{p}_d cu \mathbf{p} :

$$\mathbf{E}_{vp} = -\text{grad} \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{4 \pi \epsilon_0 r^3}. \quad (2.69)$$

Deoarece,

$$\text{grad} \left(\mathbf{p} \mathbf{r} \frac{1}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} \text{grad}(\mathbf{p} \mathbf{r}) + (\mathbf{p} \mathbf{r}) \text{grad} \frac{1}{r^3} = \frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3 \mathbf{r}(\mathbf{p} \mathbf{r})}{r^5} \quad (2.70)$$

relația (2.69) devine:

$$\mathbf{E}_{vp} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{3 \mathbf{r}(\mathbf{p} \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]. \quad (2.71)$$

În cazul unui corp masiv polarizat electric, acesta se fragmentează în elemente de volum, fiecare element de volum dv având momentul electric elementar $d\mathbf{p} = \mathbf{P} dv$. Câmpul electric elementar $d\mathbf{E}_{vp}$ produs în vid de momentul electric elementar $d\mathbf{p}$ se calculează cu relația (2.69):

$$d\mathbf{E}_{vp} = -\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} (\mathbf{P} \text{grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv \quad (2.72)$$

și prin integrare pe volumul v al corpului rezultă intensitatea câmpului electric produs în vid de corpul masiv polarizat electric:

$$\mathbf{E}_{vp} = -\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_v (\mathbf{P} \text{grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv. \quad (2.73)$$

Relația (2.73) nu se poate aplica dacă polarizația este exclusiv temporară, datorită dependenței acesteia de câmpul electric.

2.8.4. Sarcina electrică de polarizație din interiorul unei suprafețe închise care se află într-un dielectric

Pentru a descrie comportarea corpurilor polarizate în câmp electric, cât și pentru a calcula câmpul electric produs de acestea, se pot utiliza *sarcinile electrice de polarizație*. Acestea sunt sarcini electrice fictive, care ar produce o stare de electrizare echivalentă cu starea de polarizare a unui corp.

Echivalența dintre momentul electric al unui mic corp polarizat electric și momentul dipolar al unui sistem de două sarcini punctiforme dipolare, permite studiul polarizării electrice a unui corp masiv pe modelul repartiției de dipoli, respectiv de sarcină electrică dipolară.

Fie Σ o suprafață închisă trasată în interiorul unui corp polarizat (fig. 2.18 a). Se fragmentează corpul în volume elementare de forma unor prisme ale căror muchii Δs sunt paralele cu polarizația \mathbf{P} . Momentul electric elementar $\Delta \mathbf{p}$ al elementului de volum Δv se calculează cu relația (2.45) și are expresia:

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{P} \Delta v = \mathbf{P} (\Delta \mathbf{A} \Delta s) = (\mathbf{P} \Delta \mathbf{A}) \Delta s = \Delta q_d \Delta s, \quad (2.74)$$

unde s-a considerat că fiecare fragment de moment electric $\Delta \mathbf{p}$ este echivalent cu

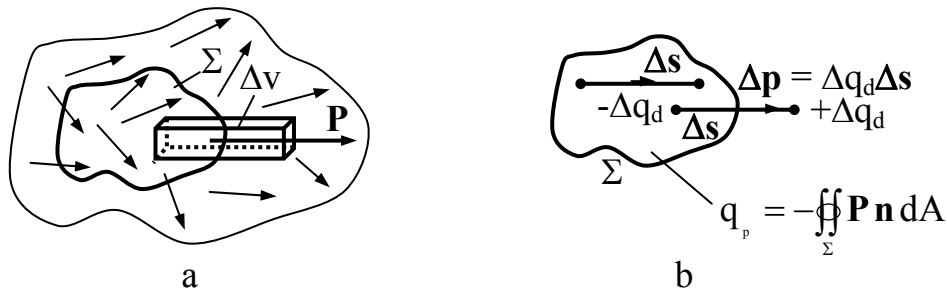


Fig. 2.18

un dipol elementar cu sarcinile dipolare Δq_d și $-\Delta q_d$, situate la distanța Δs (fig. 2.18, b). Contribuția la sarcina dipolară totală din interiorul suprafeței Σ a fragmentelor neintersectate de suprafață este nulă; fragmentelor intersectate ale căror sarcini dipolare pozitive Δq_d sunt situate în interiorul acesteia, le corespund unghiuri $\angle(\mathbf{P}, \mathbf{n})$ cuprinse între $\pi/2$ și π , iar celor ale căror sarcini dipolare negative $-\Delta q_d$ sunt situate în interiorul suprafeței Σ , le corespund unghiuri cuprinse între zero și $\pi/2$. Ca urmare, în relația (2.74) Δq_d are forma următoare:

$$\Delta q_d = -\mathbf{P} \mathbf{n} dA, \quad (2.75)$$

unde \mathbf{n} este versorul normalei la suprafața Σ , orientat din interior spre exterior.

La limită, integrând ambii membri ai relației (2.75), se obține sarcina dipolară totală din interiorul suprafeței Σ și care se notează cu q_p :

$$q_p = -\int\int_{\Sigma} \mathbf{P} \mathbf{n} dA. \quad (2.76)$$

Excesul de sarcină electrică dipolară de un semn față de sarcina dipolară de semn contrar din interiorul suprafeței Σ se numește *sarcină de polarizație electrică* q_p , egală cu integrala de suprafață luată cu semn schimbat a polarizației \mathbf{P} . Ca urmare, starea de polarizare electrică a corpului este echivalentă cu o stare de încărcare cu sarcină electrică de polarizație.

Ținând seama de localizarea polarizării electrice, sarcina de polarizație q_p se repartizează cu densitate de volum ρ_{vp} , care se definește la fel ca densitatea de volum a sarcinii electrice adevărate, adică:

$$\rho_{vp} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q_p}{\Delta v} = \frac{dq_p}{dv} \quad (2.77)$$

și deci,

$$q_p = \iiint_{V_\Sigma} \rho_{vp} \, dv. \quad (2.78)$$

Fie S_d o suprafață de discontinuitate a polarizației, care separă domeniile dielectrice 1 și 2 în care polarizațiile \mathbf{P}_1 și \mathbf{P}_2 sunt funcții continue de punct (fig. 2.19). Se consideră cilindrul elementar a cărui generatoare Δh este normală pe S_d și fie \mathbf{n}_1 și \mathbf{n}_2 versorii fețelor cilindrului orientați din interiorul acestuia spre exterior. La limită, pentru $\Delta h \rightarrow 0$, fluxul elementar al polarizației prin suprafața cilindrului corespunde exclusiv celor două fețe și relația (2.76) se scrie sub forma:

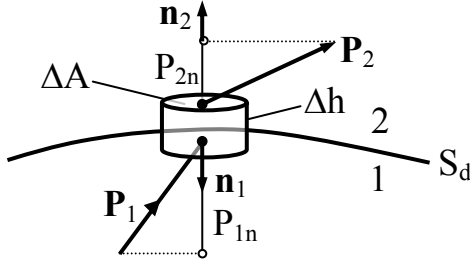


Fig. 2.19

$$\Delta q_p = -(\mathbf{P}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{P}_2 \mathbf{n}_2) \Delta A. \quad (2.79)$$

Dacă se notează cu ρ_{Ap} densitatea de suprafață a sarcinii de polarizație, definită la fel ca densitatea de suprafață a sarcinii electrice adevărate,

$$\rho_{Ap} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q_p}{\Delta A} = \frac{dq_p}{dA}, \quad (2.80)$$

din relațiile (2.79) și (2.80) se obține:

$$\rho_{Ap} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q_p}{\Delta A} = - \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{P}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{P}_2 \mathbf{n}_2) \Delta A}{\Delta A} = -(\mathbf{P}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{P}_2 \mathbf{n}_2). \quad (2.81)$$

Notând cu \mathbf{n}_{12} versorul normal pe S_d , orientat dinspre domeniul 1 spre domeniul 2 ($\mathbf{n}_{12} = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$), relația (2.81) devine:

$$\rho_{Ap} = -(\mathbf{P}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{P}_2 \mathbf{n}_2) = \mathbf{n}_{12} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = P_{1n} - P_{2n}, \quad (2.82)$$

unde $P_{1n} = \mathbf{P}_1 \cdot \cos \alpha_1 = \mathbf{P}_1 \mathbf{n}_{12}$ și $P_{2n} = \mathbf{P}_2 \cdot \cos \alpha_2 = \mathbf{P}_2 \mathbf{n}_{12}$.

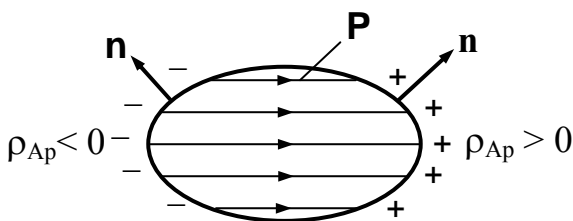


Fig. 2.20

Din relația (2.82) rezultă că pe suprafața de separație S_d a două domenii dielectrice, densitatea de suprafață a sarcinii electrice de polarizație ρ_{Ap} este egală cu diferența componentelor normale ale polarizației.

Dacă domeniul 2 este vid ($\mathbf{P}_2 = 0$), la suprafața corpului polarizat densitatea ρ_{Ap} are expresia:

$$\rho_{Ap} = \mathbf{P} \mathbf{n} = P \cos \alpha, \quad (2.83)$$

\mathbf{n} fiind versorul normalei orientat spre vid.

În punctele de pe suprafața corpului în care liniile lui \mathbf{P} se termină, densitatea de sarcină este pozitivă, $\rho_{Ap} > 0$, iar în punctele în care liniile lui \mathbf{P} încep, densitatea este negativă, $\rho_{Ap} < 0$ (fig. 2.20).

Sarcina de polarizație a unui corp polarizat electric situat în vid este nulă deoarece suma sarcinilor dipolare din interiorul corpului este nulă, iar sarcina de polarizație care încarcă suprafața corpului este de asemenea nulă (integrala de suprafață a densității superficiale de sarcină pozitivă fiind egală și de semn opus cu integrala de suprafață a densității de sarcină negativă).

Atât sarcina electrică de polarizație q_p cât și densitățile ei de volum ρ_{vp} și de suprafață ρ_{Ap} sunt mărimi derivate, unitățile lor de măsură fiind aceleași cu cele ale sarcinii adevărate, respectiv ale densităților acesteia.

2.9. INTENSITATEA CÂMPULUI ELECTRIC ȘI INDUCȚIA ELECTRICĂ ÎN DIELECTRICI

Se consideră un corp încărcat cu sarcina $q_\Sigma > 0$ înconjurat de un dielectric (fig. 2.21). Sub acțiunea câmpului electric stabilit de sarcina q_Σ , dielectricul se polarizează. Dielectricul masiv polarizat electric poate fi divizat în mici corpuri polarizate, iar acestea la rândul lor pot fi substituite prin dipoli echivalenți. Deci

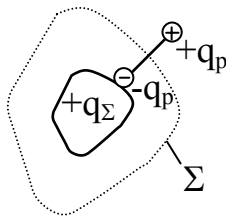


Fig. 2.21

problema câmpului poate fi tratată ca și cum aceasta ar fi în vid. Prin urmare, se poate utiliza teorema lui Gauss, luând în considerare corpul încărcat cu sarcina electrică (adevărată) q_Σ cât și sarcinile electrice dipolare rezultate din substituirea substanței printr-un ansamblu de dipoli electrice elementari. În acest sens, se consideră o suprafață închisă Σ trasată prin dielectric și care nu intersectează corpul încărcat cu sarcină electrică. Sarcina totală conținută în interiorul suprafeței închise Σ este $q_{t\Sigma} = q_\Sigma + q_p$, unde q_p este sarcina de polarizație din interiorul suprafeței închise Σ (2.76). Notând cu \mathbf{E} vectorul intensitate a câmpului electric în interiorul dielectricului și aplicând teorema lui Gauss (2.35), se obține:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E} \mathbf{n}_{\Sigma} dA = \frac{1}{\epsilon_0} (q_{\Sigma} + q_p) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(q_{\Sigma} - \oiint_{\Sigma} \mathbf{P} \mathbf{n}_{\Sigma} dA \right), \quad (2.84)$$

sau

$$\oiint_{\Sigma} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \mathbf{n}_{\Sigma} dA = q_{\Sigma}. \quad (2.85)$$

În relația (2.85), mărimea vectorială

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.86)$$

este numită *inducție electrică în corpuri*, iar \mathbf{E} *intensitate a câmpului electric în corpuri*.

Pentru dielectricii fără polarizație permanentă, $\mathbf{P}_p = 0$, relația (2.86) devine:

$$\mathbf{D}(\mathbf{E}) = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_t(\mathbf{E}). \quad (2.87)$$

Un material dielectric este izotrop dacă sub acțiunea unui câmp electric având orice orientare în corp, se polarizează temporar în direcția câmpului și este liniar dacă local polarizația temporară \mathbf{P}_t este proporțională cu intensitatea câmpului electric \mathbf{E} (v. par. 2.8):

$$\mathbf{P}_t = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}. \quad (2.88)$$

Mărimea adimensională χ_e se numește *susceptivitate electrică*. În general, mărimea χ_e deși independentă de \mathbf{E} depinde de condiții neelectrice (temperatură, presiune, etc.).

Introducând (2.88) în (2.87), se obține:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}, \quad (2.89)$$

unde mărimea adimensională

$$1 + \chi_e = \varepsilon_r \quad (2.90)$$

se numește *permitivitate relativă*.

Înlocuind (2.90) în (2.89) se obține:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.91)$$

unde

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (2.92)$$

se numește *permitivitate absolută*.

Observații.

a. Polarizația \mathbf{P} este o mărime care caracterizează corpul și dacă se presupune dată, ar rezulta că inducția \mathbf{D} nu este independentă deoarece se exprimă printr-o relație liniară, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, în funcție de \mathbf{E} și \mathbf{P} și deci pentru caracterizarea câmpului electric în dielectrici ar fi suficient numai \mathbf{E} . Deoarece pentru dielectricii cu polarizație temporară vectorul \mathbf{P}_t este funcție de \mathbf{E} (2.88), relația (2.87) are forma: $\mathbf{D}(\mathbf{E}) = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E})$ și deci pentru caracterizarea câmpului electric în dielectrici sunt necesare două mărimi \mathbf{E} și $\mathbf{D}(\mathbf{E})$.

b. Mărimile \mathbf{E} și \mathbf{D} sunt mărimi derivate, iar din punctul de vedere al unităților de măsură sunt mărimi secundare. În sistemul de unități SI, unitatea lui \mathbf{E} (v. relația 2.137) este *volt pe metru* (V/m) și a lui \mathbf{D} (v. relația 2.93) este *coulomb pe metru pătrat* (C/m²).

2.9.1. Teorema fluxului electric

a. Forma integrală a teoremei fluxului electric. Ținând seama de relațiile (2.85) și (2.86), fluxul electric Ψ_{Σ} prin suprafața închisă Σ , este

$$\Psi_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} \mathbf{D} \mathbf{n}_{\Sigma} dA = q_{\Sigma}. \quad (2.93)$$

Relația (2.93) constituie *forma integrală a teoremei fluxului electric: în regim electrostatic, fluxul electric Ψ_{Σ} printr-o suprafață închisă Σ trasată integral în corpuri (dielectrice sau conductoare), parțial în corpuri și parțial în vid sau integral în vid este egal cu sarcina electrică (adevărată) q_{Σ} din interiorul suprafeței.*

b. Forma diferențială (locală) a teoremei fluxului electric. Divergența inducției electrice. Notăm cu v_{Σ} domeniul mărginit de suprafața închisă Σ care conține sarcina electrică q_{Σ} (fig. 2.22). Împărțim volumul v_{Σ} în două volume, prin suprafața S delimitată de curba Γ . Fie v_1 și v_2 aceste două părți ale lui v_{Σ} . Suprafața Σ_1 ce delimitează volumul v_1 include pe S ca și suprafața Σ_2 ce

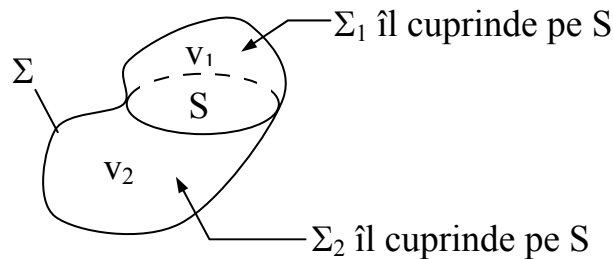


Fig. 2.22.

delimitează volumul v_2 . Este evident că suma integralelor pe cele două suprafețe $\oiint_{\Sigma_1} \mathbf{D} d\mathbf{A}_1 + \oiint_{\Sigma_2} \mathbf{D} d\mathbf{A}_2$ va fi egală cu integrala pe întreaga suprafață $\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A}$. Acest

lucru se explică prin aceea că fiecare porțiune din S contribuie în mod egal cu un semn în prima integrală și cu semn opus în a doua integrală, deoarece direcția spre exterior într-un caz devine direcție spre interior în celălalt (v. par. 2.6). Cu alte cuvinte, orice flux care iese din v_1 prin suprafața S este un flux ce intră în v_2 . Restul suprafeței este identic cu cel al volumului inițial întreg. Continuăm divizarea volumului v_{Σ} într-un număr mare de porțiuni (elemente de volum) v_1, v_2, \dots, v_n , cu suprafețele ce le delimitează $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$. Indiferent de numărul elementelor de volum,

$$\sum_{k=1}^n \oiint_{\Sigma_k} \mathbf{D} d\mathbf{A}_k = \oiint_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \Psi_{\Sigma}. \quad (2.94)$$

La limită, când n devine foarte mare, vrem să găsim ce este caracteristic pentru o porțiune foarte mică și în final pentru vecinătatea unui punct.

Dacă continuăm divizarea, n devine $2n$ și integrala de sub suma din relația (2.94) se împarte în doi termeni, fiecare din ei mai mic decât cel dinainte de divizare, deoarece suma lor rămâne constantă. Cu alte cuvinte, pe măsură ce luăm volume din ce în ce mai mici în jurul aceluiași punct, integrala de suprafață pe unul din aceste volume se micșorează continuu. Volumul se împarte de asemenea în două părți a căror sumă dă volumul inițial. Rezultă că trebuie să luăm în considerare raportul dintre integrala de suprafață și volumul elementului din spațiul divizat:

$$\frac{\oiint_{\Sigma_k} \mathbf{D} d\mathbf{A}_k}{V_k} . \quad (2.95)$$

Evident, pentru n suficient de mare, adică pentru o divizare în porțiuni din ce în ce mai mici, la fiecare împărțire a integralei de suprafață în doi termeni și volumul va fi împărțit în două. Continuând o asemenea divizare, în jurul unei anumite regiuni, acest raport tinde către o limită. Această limită este o proprietate caracteristică funcției vectoriale \mathbf{D} în vecinătatea acestui punct. O numim *divergența* lui \mathbf{D} și o notăm $\text{div}\mathbf{D}$. Înseamnă că valoarea $\text{div}\mathbf{D}$ în orice punct este egală cu:

$$\text{div}\mathbf{D} = \lim_{V_k \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\Sigma_k} \mathbf{D} d\mathbf{A}_k}{V_k} , \quad (2.96)$$

unde V_k este volumul ce conține punctul respectiv și Σ_k suprafața ce delimitează acest volum și peste care se ia integrala de suprafață.

Noțiunea de $\text{div}\mathbf{D}$ poate fi formulată în modul următor: $\text{div}\mathbf{D}$ este fluxul pe unitatea de volum care iese din volumul V_k , pentru V_k infinit de mic. Evident, $\text{div}\mathbf{D}$ este o mărime scalară. Ea poate varia de la punct la punct, valoarea ei într-un punct oarecare fiind dată de limita raportului din relația (2.96) când V_k devine din ce în ce mai mic, cuprinzând tot timpul punctul respectiv. În acest fel, $\text{div}\mathbf{D}$ este o funcție scalară de coordonate.

Relația (2.94) poate fi scrisă sub forma:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \oiint_{\Sigma_k} \mathbf{D} d\mathbf{A}_k = \sum_{k=1}^n V_k \left[\frac{\oiint_{\Sigma_k} \mathbf{D} d\mathbf{A}_k}{V_k} \right] . \quad (2.97)$$

La limită, când $n \rightarrow \infty$, $V_k \rightarrow 0$, termenul din paranteză devine divergența lui \mathbf{D} și suma trece într-o integrală de volum:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \iiint_{V_{\Sigma}} \text{div}\mathbf{D} dv . \quad (2.98)$$

Această ecuație reprezintă *teorema divergenței*. Ea este valabilă pentru orice câmp vectorial pentru care există limita din relația (2.96).

Dacă sarcina electrică q_Σ din interiorul suprafeței Σ se distribuie cu densitate de volum ρ_v , $q_\Sigma = \iiint_{v_\Sigma} \rho_v dv$, aplicând teorema divergenței relației (2.93) se obține:

$$\Psi_\Sigma = \oiint_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \iiint_{v_\Sigma} \operatorname{div} \mathbf{D} dv = \iiint_{v_\Sigma} \rho_v dv. \quad (2.99)$$

Identificând integranzii ultimilor doi termeni, rezultă:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v. \quad (2.100)$$

Relația (2.100) reprezintă *forma diferențială (locală) a teoremei fluxului electric*, exprimată prin relația locală dintre densitatea de sarcină și câmpul electric: *în fiecare punct din câmpul electrostatic divergența inducției electrice este egală cu densitatea de volum a sarcinii electrice.*

Punctele din spațiul câmpului \mathbf{D} în care $\operatorname{div} \mathbf{D} \neq 0$ se numesc *sursele câmpului \mathbf{D}* . În consecință, sursele câmpului se află numai în acele puncte ale

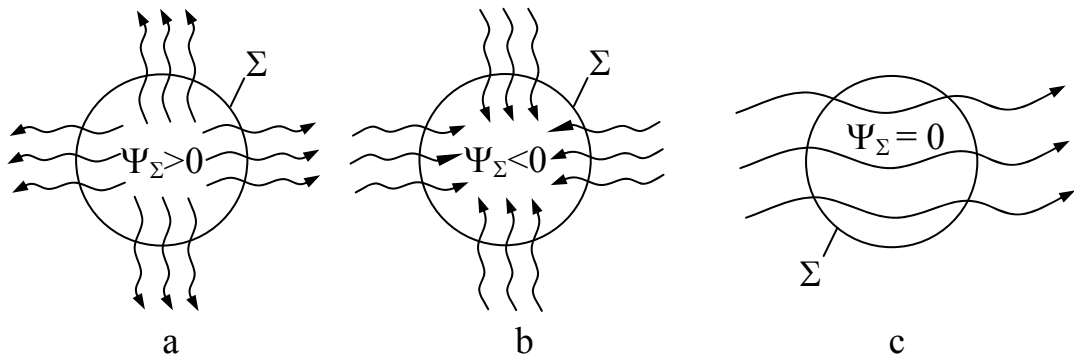


Fig. 2.23

spațiului unde există sarcini electrice. Din relația (2.100) rezultă că liniile de câmp electric sunt linii deschise care diverg din sursele pozitive ale câmpului (de divergență pozitivă, fig. 2.23, a) și converg în sursele negative ale câmpului (de divergență negativă, fig. 2.23, b). Dacă $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ (deci $\rho_v = 0$) se spune că în punctele respective câmpul nu are surse. Din anularea fluxului electric nu rezultă și anularea inducției electrice. În acest caz, integrala efectuată pe porțiunile de suprafață prin care liniile de câmp ale inducției electrice intră în suprafața Σ este egală și de semn opus cu integrala de suprafață pe porțiunile suprafeței prin care liniile de câmp ies din Σ (fig. 2.23, c).

c. Forma locală a teoremei fluxului electric pe suprafețe de discontinuitate. Relația (2.100) este valabilă numai în domeniile în care inducția electrică este funcție continuă de punct. Fie S_d o suprafață de discontinuitate a inducției electrice, care separă domeniile dielectrice 1 și 2, omogene și izotrope, în care inducțiile \mathbf{D}_1 și \mathbf{D}_2 sunt funcții continue de punct (fig. 2.24). Se consideră cilindrul elementar a cărui generatoare Δh este normală pe S_d și fie \mathbf{n}_1 și \mathbf{n}_2 versorii fețelor cilindrului orientați din interiorul acestuia spre exterior. La limită, pentru

$\Delta h \rightarrow 0$, fluxul elementar prin suprafața cilindrului corespunde exclusiv celor două fețe și relația (2.93) se scrie sub forma:

$$(\mathbf{D}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{D}_2 \mathbf{n}_2) \Delta A = \Delta q. \quad (2.101)$$

Dacă se notează cu ρ_A densitatea de suprafață a sarcinii electrice pe suprafața S_d , rezultă:

$$\rho_A = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{D}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{D}_2 \mathbf{n}_2) \Delta A}{\Delta A} = (\mathbf{D}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{D}_2 \mathbf{n}_2). \quad (2.102)$$

Notând cu \mathbf{n}_{12} versorul normal pe S_d , orientat dinspre domeniul 1 spre domeniul 2 ($\mathbf{n}_{12} = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$), relația (2.102) devine:

$$\rho_A = (\mathbf{D}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{D}_2 \mathbf{n}_2) = \mathbf{n}_{12} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = D_{2n} - D_{1n}, \quad (2.103)$$

unde: $D_{1n} = D_1 \cos \alpha_1 = \mathbf{D}_1 \mathbf{n}_{12}$ și $D_{2n} = D_2 \cos \alpha_2 = \mathbf{D}_2 \mathbf{n}_{12}$.

Din relația (2.103) rezultă că pe suprafața de separație S_d , densitatea de suprafață a sarcinii electrice ρ_A este egală cu diferența componentelor normale ale inducției electrice. Relația (2.103) constituie forma *locală a teoremei fluxului electric pe suprafețe de discontinuitate*.

Dacă densitatea de suprafață a sarcinii electrice ρ_A pe suprafața S_d este nulă, rezultă:

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (2.104)$$

Pe suprafața de separație neîncărcată cu sarcină electrică, componentele normale ale inducției electrice se conservă.

Observație. Aplicând membrului al doilea al relației (2.76) teorema divergenței și identificând cu membrul al doilea al relației (2.78), se obține:

$$\rho_{vp} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (2.105)$$

Relația (2.105) este valabilă numai în domeniile în care polarizația este funcție continuă de punct.

2.10. CÂMPUL ELECTROSTATIC AL SARCINILOR ELECTRICE ÎN DIELECTRICI LINIARI, IZOTROPI ȘI OMOGENI, FĂRĂ POLARIZAȚIE ELECTRICĂ PERMANENTĂ

2.10.1. Câmpul electrostatic al sarcinilor punctiforme

Se consideră o sarcină punctiformă q situată într-un dielectric liniar, izotrop și omogen, fără polarizație electrică permanentă (fig. 2.25). Aplicând teorema fluxului electric pe o suprafață închisă Σ de forma unei sfere de rază r , rezultă:

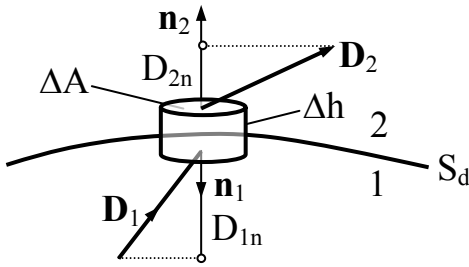


Fig. 2.24

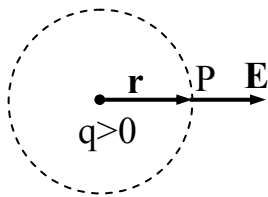
$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \oiint_{\Sigma} \epsilon \mathbf{E} d\mathbf{A} = q. \quad (2.106)$$

Din motive de simetrie, vectorii \mathbf{E} și $d\mathbf{A}$ sunt paraleli și de același sens și intensitatea câmpului electric are aceeași valoare în orice punct care se află la aceeași distanță de sarcina q . Prin urmare, relația (2.106) devine:

$$\epsilon E \oiint_{\Sigma} dA = \epsilon E 4\pi r^2 = q. \quad (2.107)$$

Din relația (2.107) se obține:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}, \quad (2.108)$$



sau ținând seama de orientare:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.109)$$

Fig. 2.25

Din relația (2.109) rezultă că intensitatea câmpului electric stabilită într-un dielectric liniar, izotrop și omogen este de ϵ_r mai mică decât intensitatea câmpului electrostatic stabilită în vid de aceeași sarcină electrică punctiformă (v. relația 2.17).

2.10.2. Câmpul electrostatic al sarcinilor distribuite

Dacă sarcinile sunt distribuite în volum, pe o suprafață, liniar și discret, conform principiului superpoziției efectelor, intensitatea câmpului electric \mathbf{E} se calculează cu relația (2.23) în care ϵ_0 se înlocuiește cu ϵ :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\iiint_v \rho_v \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv + \iint_S \rho_A \frac{\mathbf{r}}{r^3} dA + \int_C \rho_l \frac{\mathbf{r}}{r^3} ds + \sum_{k=1}^n q_k \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} \right], \quad (2.110)$$

2.10.3. Câmpul electrostatic al unor sarcini distribuite

a. *Câmpul electrostatic produs de o sferă de rază a încărcată cu sarcină distribuită cu densitate superficială $+\rho_A$ constantă.*

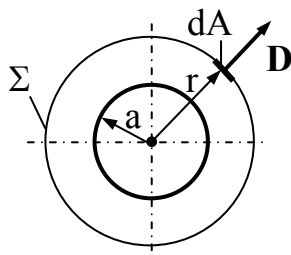


Fig. 2.26

Din motive de simetrie, intensitatea câmpului electrostatic are aceeași valoare în orice punct exterior care se află la aceeași distanță de centrul sferei și este orientată radial. Se consideră sfera Σ concentrică, de rază $r > a$ (fig. 2.26). Aplicând teorema fluxului electric suprafeței închise Σ , se obține succesiv:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \oiint_{\Sigma} D dA = 4\pi r^2 \epsilon E = q_{\Sigma} = 4\pi a^2 \rho_A, \quad (2.111)$$

$$E = \frac{a^2 \rho_A}{r^2 \epsilon} = \frac{q_\Sigma}{4\pi \epsilon r^2}. \quad (2.112)$$

Se observă că expresia (2.112) este identică cu cea a intensității câmpului electrostatic stabilită de sarcina punctiformă situată în centrul sferei (2.109). În orice punct interior sferei de rază a , q_Σ din relația (2.112) este nulă și prin urmare intensitatea câmpului electrostatic în interiorul sferei este de asemenea nulă.

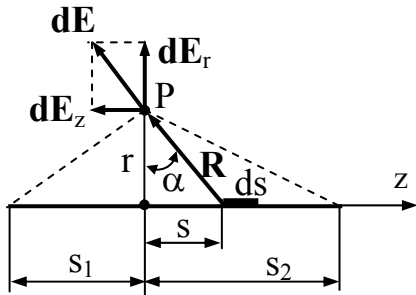


Fig. 2.27

b. Câmpul electrostatic produs de un fir rectiliniu de lungime finită, uniform încărcat cu densitatea liniară de sarcină ρ_1 .

Se alege un sistem de coordonate cilindrice (r, φ, z) cu axa Oz în lungul firului și originea O în piciorul perpendicularei pe fir, dusă din punctul P , situat la distanța r de fir, în care se calculează câmpul (fig. 2.27). Câmpul electrostatic elementar $d\mathbf{E}$ stabilit de sarcina elementară $dq = \rho_1 ds$ care încarcă elementul ds se calculează cu relația:

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon R^2} \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\rho_1 ds}{4\pi\epsilon R^2} \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (2.113)$$

și se descompune într-o componentă axială

$$dE_z = dE \sin \alpha = \frac{\rho_1 ds}{4\pi\epsilon R^2} \sin \alpha = \frac{\rho_1 s}{4\pi\epsilon R^3} ds = \frac{\rho_1}{4\pi\epsilon} \frac{s}{\sqrt{(s^2 + r^2)^3}} ds \quad (2.114)$$

și o componentă radială

$$dE_r = dE \cos \alpha = \frac{\rho_1 ds}{4\pi\epsilon R^2} \cos \alpha = \frac{\rho_1 r}{4\pi\epsilon R^3} ds = \frac{\rho_1}{4\pi\epsilon} \frac{r}{\sqrt{(s^2 + r^2)^3}} ds. \quad (2.115)$$

Integrând, se obține:

$$E_z = \frac{\rho_1}{4\pi\epsilon} \int_{-s_1}^{s_2} \frac{s ds}{\sqrt{(s^2 + r^2)^3}} = -\frac{\rho_1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{s^2 + r^2}} \Big|_{-s_1}^{s_2} = \frac{\rho_1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{s_1^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{s_2^2 + r^2}} \right), \quad (2.116)$$

$$E_r = \frac{\rho_1 r}{4\pi\epsilon} \int_{-s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{(s^2 + r^2)^3}} = \frac{\rho_1}{4\pi\epsilon r} \frac{s}{\sqrt{s^2 + r^2}} \Big|_{-s_1}^{s_2} = \frac{\rho_1}{4\pi\epsilon r} \left(\frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 + r^2}} + \frac{s_2}{\sqrt{s_2^2 + r^2}} \right). \quad (2.117)$$

Dacă firul este infinit lung ($s_1, s_2 \rightarrow \infty$), componenta axială se anulează, $\lim_{s_1, s_2 \rightarrow \infty} E_z = 0$ și vectorul \mathbf{E} are expresia:

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{u}_r = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r} \mathbf{u}_r. \quad (2.118)$$

Prin urmare, câmpul electrostatic al unui fir rectiliniu, infinit lung și uniform încărcat cu sarcină electrică este orientat radial de la fir spre infinit dacă sarcina este pozitivă și către fir dacă sarcina este negativă. Vectorul câmp fiind normal pe fir și deoarece nu depinde de coordonata în lungul firului, câmpul se numește *plan paralel*.

c. *Câmpul electrostatic stabilit de sarcina electrică distribuită uniform cu densitate de suprafață $+\rho_A$ pe un cilindru de rază a și infinit de lung.*

Din motive de simetrie, intensitatea câmpului electric are aceeași valoare în orice punct exterior care se află la aceeași distanță de axa cilindrului și este orientată radial. Pentru fluxul electric prin suprafața cilindrică Σ coaxială cu

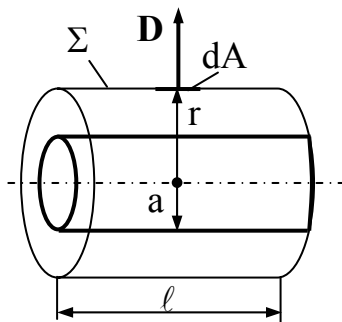


Fig. 2.28

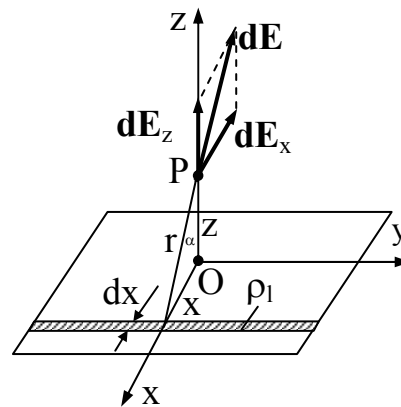


Fig. 2.29

cilindrul de lungime ℓ și rază $r > a$ (fig. 2.28) rezultă expresia:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \oiint_{\Sigma} D dA = 2\pi r \ell \epsilon E. \quad (2.119)$$

Aplicând teorema fluxului electric și ținând seama de faptul că sarcina electrică conținută în interiorul suprafeței Σ este $q_{\Sigma} = 2\pi a \ell \rho_A$, se obține:

$$E = \frac{q_{\Sigma}}{2\pi\epsilon r \ell} = \frac{a\rho_A}{r\epsilon}, \quad (2.120)$$

În orice punct interior cilindrului de rază a , sarcina q_{Σ} din relația (2.120) este nulă și prin urmare intensitatea câmpului electrostatic în interiorul cilindrului este de asemenea nulă.

Intensitatea câmpului electrostatic stabilit de sarcina electrică distribuită uniform cu densitate de suprafață $+\rho_A$ pe un cilindru de rază a și infinit de lung (2.120) are aceeași expresie cu cea a firului rectiliniu foarte lung și încărcat uniform cu densitatea lineică $\rho_l = 2\pi a\rho_A$ (v. relația 2.118).

d. Câmpul electrostatic produs de un plan infinit extins și încărcat uniform cu sarcină electrică cu densitatea superficială ρ_A (câmp de strat simplu).

Soluția I. Se alege un sistem de coordonate carteziene cu originea O în piciorul perpendicularei pe planul sarcinii dusă din punctul P în care se calculează câmpul și cu axele Ox și Oy în planul considerat (fig. 2.29). O fâșie de lățime dx, situată la distanța x de originea O, poate fi considerată ca fiind un fir a cărui densitate lineică de sarcină este $d\rho_l = \rho_A dx$. Vectorul câmp electrostatic elementar $d\mathbf{E}$ stabilit de firul încărcat cu sarcina $d\rho_l$ se determină cu relația (2.118):

$$d\mathbf{E} = \frac{d\rho_l}{2\pi\epsilon r} \mathbf{u}_r = \frac{\rho_A dx}{2\pi\epsilon r} \mathbf{u}_r. \quad (2.121)$$

Vectorul $d\mathbf{E}$ se descompune în componentele dE_x și dE_z :

$$dE_x = dE \sin \alpha = \frac{\rho_A dx}{2\pi\epsilon r} \sin \alpha = \frac{\rho_A x dx}{2\pi\epsilon r^2}; \quad (2.122)$$

$$dE_z = dE \cos \alpha = \frac{\rho_A dx}{2\pi\epsilon r} \cos \alpha = \frac{\rho_A z dx}{2\pi\epsilon r^2} = \frac{\rho_A z dx}{2\pi\epsilon(x^2 + z^2)}. \quad (2.123)$$

Deoarece $dE_x(x) = -dE_x(-x)$, rezultă $E_x = 0$.

Integrând relația (2.123), se obține:

$$E_z = \frac{\rho_A z}{2\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + z^2} = \frac{\rho_A}{2\pi\epsilon} \arctg \frac{x}{z} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\rho_A}{2\epsilon} \quad (2.124)$$

și prin urmare,

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{u}_z = \frac{\rho_A}{2\epsilon} \mathbf{u}_z. \quad (2.125)$$

Câmpul electrostatic al unui plan infinit încărcat cu sarcină electrică distribuită uniform este constant (independent de distanța z) și are liniile de câmp drepte perpendiculare pe plan. Vectorul câmp este orientat de la plan spre infinit dacă sarcina este pozitivă și către plan dacă sarcina este negativă.

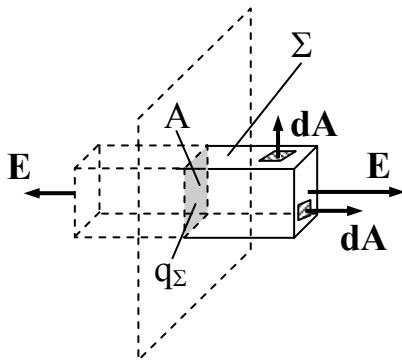


Fig. 2.30

Soluția II. Datorită simetriei plane perfecte, se poate aplica teorema fluxului electric, alegând ca suprafață închisă Σ pentru calculul fluxului, un paralelipiped (fig.2.30). Din motive de simetrie, vectorul intensitate câmp electric este orientat normal pe planul încărcat. În consecință, fluxul electric prin fețele laterale este nul (deoarece $\mathbf{E}d\mathbf{A} = 0$), iar fluxul prin suprafața Σ se reduce la fluxul prin cele două suprafețe de bază S și S' de arie A. Cum aceste suprafețe se găsesc la aceeași distanță de plan,

de o parte și de alta a lui, din aceleași motive de simetrie, vectorii intensitate câmp electric nu pot avea decât aceeași valoare E pe ambele suprafețe S și S' , dar orientări opuse. Ca urmare, fluxul prin suprafața închisă Σ este:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = \iint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{A} + \iint_{S'} \mathbf{E}' \, d\mathbf{A} = 2 A E, \quad (2.126)$$

iar sarcina din interiorul paralelipipedului:

$$q_{\Sigma} = \rho_A A. \quad (2.127)$$

Aplicând teorema lui Gauss și ținând seama de relațiile (2.126) și (2.127), se obține:

$$2 E A = \frac{\rho_A A}{\varepsilon}, \quad (2.128)$$

sau

$$E = \frac{\rho_A}{2\varepsilon}. \quad (2.129)$$

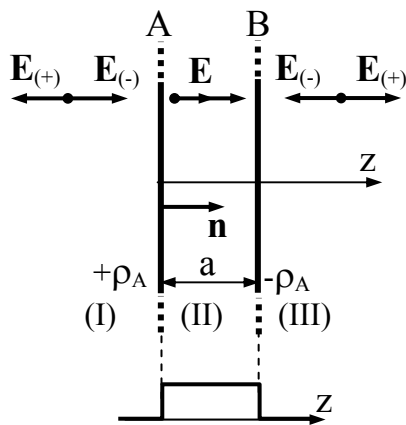


Fig. 2.31

e. *Câmpul electrostatic a două plane paralele, infinite, uniform încărcate cu sarcini egale și de semne opuse (câmp de strat dublu).*

Sistemul alcătuit din două plane de extensie infinită, dispuse paralel și încărcate cu sarcini electrice distribuite superficial, având densități egale și de semne opuse ρ_A și $-\rho_A$, formează un strat dublu de sarcini electrice (fig. 2.31). Pentru calculul câmpului electrostatic se aplică teorema superpoziției în cele trei domenii, după cum

urmează:

$$\mathbf{E}_{(I)} = \mathbf{E}_{(+)} + \mathbf{E}_{(-)} = -\frac{\rho_A}{2\varepsilon} \mathbf{n} + \frac{\rho_A}{2\varepsilon} \mathbf{n} = 0; \quad (2.130)$$

$$\mathbf{E}_{(II)} = \left(\frac{\rho_A}{2\varepsilon} + \frac{\rho_A}{2\varepsilon} \right) \mathbf{n} = \frac{\rho_A}{\varepsilon} \mathbf{n}; \quad (2.131)$$

$$\mathbf{E}_{(III)} = \mathbf{E}_{(+)} + \mathbf{E}_{(-)} = \frac{\rho_A}{2\varepsilon} \mathbf{n} - \frac{\rho_A}{2\varepsilon} \mathbf{n} = 0. \quad (2.132)$$

În relațiile de mai sus, \mathbf{n} este versorul normal pe plane și orientat de la planul cu sarcină pozitivă către cel cu sarcină negativă. Prin urmare, un strat dublu de sarcini stabilește câmp electrostatic numai în interiorul stratului, în exteriorul acestuia câmpul fiind nul (fig. 2.31).

2.11. CÂMPUL ELECTROSTATIC ÎN PREZENȚA DIELECTRICILOR

Se consideră un corp dielectric introdus într-un câmp electric exterior de intensitate \mathbf{E}_0 (fig. 2.32, a). În câmpul electrostatic \mathbf{E}_0 , dielectricul se polarizează. Sarcinile pozitive care intră în componența atomilor și moleculelor corpului se deplasează în sensul câmpului, iar cele negative în sens opus. Pe suprafața corpului apar sarcini de polarizație de semne opuse. Aceste sarcini produc un câmp propriu, atât în interiorul corpului cât și în exteriorul acestuia (fig. 2.32, b). În interiorul corpului, câmpul propriu se opune câmpului exterior, iar în exteriorul corpului se

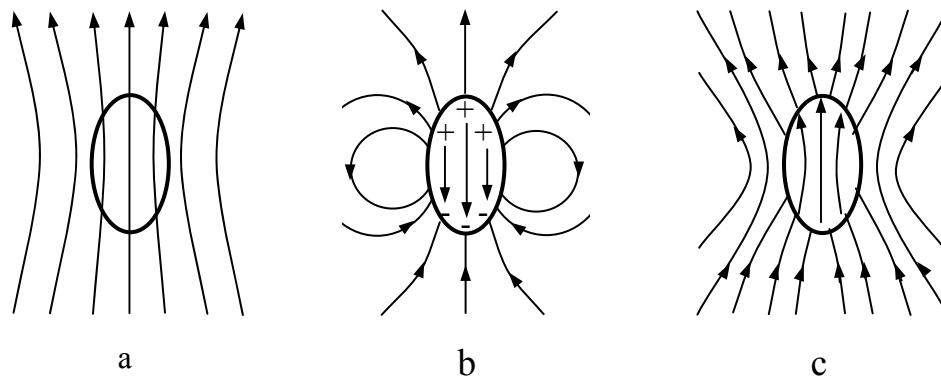


Fig. 2.32

adună câmpului exterior în anumite porțiuni ale spațiului, iar în alte porțiuni se scade. Ca urmare, rezultă o diminuare a câmpului în interiorul corpului dielectric și o deformare a acestuia în exterior (fig. 2.32, c).

2.12. POTENȚIAL ELECTROSTATIC ȘI DIFERENȚĂ DE POTENȚIAL

2.12.1. Potențialul electrostatic al sarcinilor punctiforme

Considerăm două sarcini punctiforme $q > 0$ și $q_0 > 0$. Presupunem că sarcina q este fixă, iar sarcina q_0 poate fi deplasată de-a lungul unui drum oarecare C , între două puncte P_1 și P_2 (fig. 2.33). Deplasarea se face suficient de lent, astfel încât în fiecare moment regimul să poată fi considerat electrostatic. Notăm cu \mathbf{ds} un vector egal în modul cu elementul de drum ds și orientat în sensul pozitiv al tangentei la curba C , adică în sensul deplasării sarcinii q_0 . Lucrul mecanic efectuat de forțele de natură electrostatică la deplasarea sarcinii q_0 pe curba C , de la punctul P_1 la punctul P_2 , este:

$$L_{12} = \int_{P_1(C)}^{P_2} \mathbf{F}_c \mathbf{ds} = q_0 \int_{P_1(C)}^{P_2} \mathbf{E} \mathbf{ds} \quad (2.133)$$

Intensitatea câmpului electrostatic într-un punct P de pe curba C se determină cu relația (2.109):

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.134)$$

Dacă sunt date punctele P_1 și P_2 , lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unității

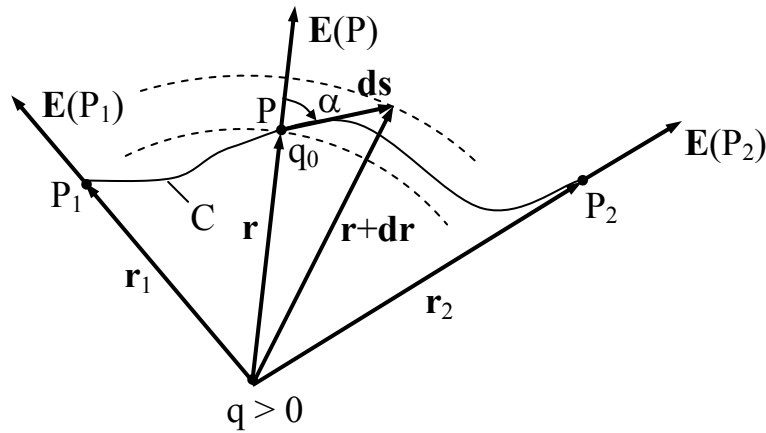


Fig. 2.33

de sarcină electrică pozitivă în câmpul \mathbf{E} , din punctul P_1 în punctul P_2 este:

$$\frac{L_{12}}{q_0} = \int_{P_1(C)}^{P_2} \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathbf{r} \, d\mathbf{s}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds \cos \alpha}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon r_2}. \quad (2.135)$$

Deoarece drumul C a fost luat arbitrar, rezultă că integrala $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \, d\mathbf{s}$ nu depinde de alegerea drumului de integrare între cele două puncte P_1 și P_2 și este funcție numai de coordonatele punctelor P_1 și P_2 .

Dacă punctul P_2 se îndepărtează la infinit ($r_2 \rightarrow \infty$) și P_1 este un punct curent P ($r_1 \rightarrow r$), din relația (2.135) rezultă:

$$\int_P^{\infty} \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} = V_P. \quad (2.136)$$

Mărimea scalară V_P se numește *potențial electrostatic* în punctul P situat la distanța r de sarcina punctiformă q care produce câmpul electrostatic de intensitate \mathbf{E} . Prin urmare, potențialul electrostatic este egal cu lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului electrostatic pentru deplasarea unității de sarcină electrică pozitivă din punctul considerat până la infinit. La infinit, potențialul electrostatic tinde către zero și are valoare finită în întreg spațiul, cu excepția punctului singular $r = 0$ în care se presupune a fi concentrată sarcina.

Mărimea scalară U_{12} egală cu lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unității de sarcină electrică pozitivă în câmpul \mathbf{E} , pe drumul C , din punctul P_1 în punctul P_2 ,

$$U_{12} = \frac{L_{12}}{q_0} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \, ds. \quad (2.137)$$

este denumită *tensiune electrică sau diferență de potențial* între cele două puncte și caracterizează proprietățile câmpului electrostatic de-a lungul drumului respectiv, anume proprietatea pe care o are câmpul de a efectua un lucru mecanic la deplasarea sarcinilor electrice de-a lungul acestui drum.

Din relația (2.135) rezultă că tensiunea electrică (diferența de potențial) este egală cu diferența dintre valorile pe care le ia funcția V definită de relația

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \quad (2.138)$$

în cele două puncte, adică

$$U_{12} = \frac{L_{12}}{q_0} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \, ds = V_{P_1} - V_{P_2}. \quad (2.139)$$

Diferența de potențial, la fel ca și tensiunea electrică, este o mărime derivată. În S.I. unitatea de măsură a diferenței de potențial, aceeași cu a tensiunii electrice, se numește *volt* (V).

În conformitate cu principiul superpoziției, *potențialul electrostatic V stabilit într-un punct oarecare de n sarcini punctiforme q_k , $k = 1, 2, \dots, n$, este egal cu suma potențialelor electrostatice V_k , $k = 1, 2, \dots, n$, stabilite în acel punct de fiecare sarcină:*

$$V = \sum_{k=1}^n V_k, \quad (2.140)$$

unde

$$V_k = \frac{q_k}{4\pi\epsilon r_k}. \quad (2.141)$$

Din relațiile (2.140) și (2.141) rezultă:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k}. \quad (2.142)$$

2.12.2. Potențialul electrostatic al sarcinilor distribuite

Dacă sarcina electrică este distribuită, potențialul electrostatic elementar dV stabilit de sarcina elementară dq se calculează cu relația (2.138),

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon r}. \quad (2.143)$$

Dacă distribuția de sarcină elementară este volumetrică cu densitatea ρ_v , în relația (2.143) se înlocuiește dq cu $\rho_v dv$ și potențialul electrostatic V se obține integrând relația (2.143) pe volum:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_v \frac{\rho_v}{r} dv. \quad (2.144)$$

Dacă sarcina electrică este distribuită superficial cu densitatea ρ_A numai în straturile foarte subțiri de la suprafața corpurilor încărcate, în relația (2.143) se înlocuiește dq cu $\rho_A dA$ și potențialul electrostatic V se obține integrând relația (2.143) pe suprafață:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_s \frac{\rho_A}{r} dA. \quad (2.145)$$

În cazul în care sarcina electrică este distribuită liniar cu densitatea ρ_l , în relația (2.143) se înlocuiește dq cu $\rho_l ds$ și potențialul V se obține integrând relația (2.143) pe linie:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_c} \int_c \frac{\rho_l}{r} ds. \quad (2.146)$$

Dacă în câmp se găsesc corpuri încărcate cu sarcini distribuite volumetric, superficial, liniar și discret, conform principiului superpoziției, potențialul electrostatic V într-un punct oarecare are expresia:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\int_v \frac{\rho_v}{r} dV + \int_s \frac{\rho_A}{r} dA + \int_c \frac{\rho_l}{r} ds + \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k} \right]. \quad (2.147)$$

Relațiile (2.144 – 2.146) s-au stabilit pe baza expresiei potențialului electrostatic al unei sarcini punctiforme (2.136), care s-a obținut în ipoteza că potențialul punctelor depărtate la infinit este nul. Prin urmare, relațiile (2.144 – 2.146) pot fi utilizate pentru calculul potențialului electrostatic numai în cazul în care sarcinile sunt distribuite într-o regiune finită din spațiu. Dacă sarcina electrică este repartizată în întreg spațiul, potențialul într-un punct la infinit nefiind nul, nu poate fi luat origine a potențialului și în relația (2.147) cel puțin una dintre integrale este divergentă (infinit de mare). Într-adevăr, în aceste cazuri, întreg spațiul (spațiul infinit) cuprinde nu numai punctele îndepărtate la infinit dar și o bună parte din corpurile propriu zise, încărcate cu sarcini electrice. Într-un sistem de sarcini distribuite la infinit, potențialul într-un punct din câmp se obține calculând diferența de potențial între punctul considerat P și un punct de referință P_0 ales arbitrar, utilizând relația (2.139):

$$V_P = V_{P_0} - \int_{P_0}^P \mathbf{E} ds. \quad (2.148)$$

Alegerea punctului de referință este arbitrară, cu condiția ca integrala intensității câmpului electrostatic între punctele P_0 și P să nu ia valori infinite. În acest caz nu se precizează punctul P_0 și în relația (2.148) V_p este o constantă aditivă:

$$V_p = -\int^P \mathbf{E} \, ds + \text{const.} \quad (2.149)$$

Prin urmare, potențialul electrostatic poate fi determinat numai cu aproximația unei constante scalare arbitrare, care depinde de alegerea arbitrară a punctului de referință.

Câmpul care în fiecare punct poate fi caracterizat cu aproximația unei mărimi scalare arbitrare, denumită potențial electrostatic, se numește *câmp potențial*.

Observație. *Noțiunea de diferență de potențial, aplicabilă numai câmpurilor potențiale, are un sens mai restrâns decât noțiunea de tensiune electrică, aplicabilă oricărui câmp electric (v. par.5.2.1, g). Cele două noțiuni, tensiune electrică între punctele P_1 și P_2 și diferență de potențial între punctele P_1 și P_2 , coincid numai în cazul câmpului potențial.*

2.12.3. Suprafețe echipotențiale

Potențialul electrostatic fiind o funcție scalară de punct, se pot trasa suprafețe ale căror puncte au același potențial, numite *suprafețe echipotențiale* sau *suprafețe de nivel*. Ecuațiile suprafețelor echipotențiale se obțin egalând cu constante expresiile analitice ale potențialului,

$$V(x, y, z) = \text{const.} \quad (2.150)$$

2.12.4. Gradientul de potențial

Dacă se diferențiază relația (2.148), se obține:

$$dV = -\mathbf{E} \, ds = -E \, ds \cos \alpha, \quad (2.151)$$

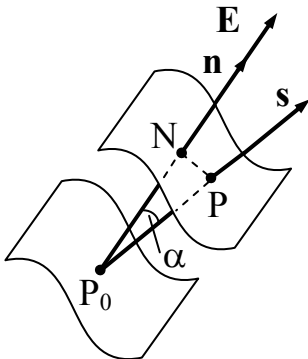


Fig. 2.34

unde α este unghiul format de direcția deplasării ds cu vectorul \mathbf{E} . Dacă direcția deplasării formează un unghi drept cu vectorul \mathbf{E} , atunci $\cos \alpha = 0$ și $dV = 0$. Prin urmare, deplasându-ne într-o direcție perpendiculară pe direcția liniilor intensității câmpului \mathbf{E} , vom avea $V = \text{const.}$, adică vom rămâne pe o suprafață echipotențială. Deci, liniile intensității câmpului \mathbf{E} sunt normale la suprafața echipotențială. Fie \mathbf{n} versorul normalei la suprafața echipotențială care trece prin punctul P_0 și \mathbf{s} versorul tangentei la curba în lungul căreia se

efectuează integrala (2.148) (fig. 2.34). Sensul versorului \mathbf{n} se ia în sensul în care funcția V crește. Fie P și N punctele în care versorii \mathbf{s} și \mathbf{n} intersectează o suprafață de nivel vecină și l_{P_0P} , l_{P_0N} deplasările din P_0 în P și N . Deoarece punctele P și N

sunt pe o aceeași suprafață echipotențială, variația funcției V este aceeași pentru ambele deplasări,

$$V(P) - V(P_0) = V(N) - V(P_0) \quad (2.152)$$

și derivata funcției V după direcția \mathbf{s} va fi:

$$\frac{dV}{ds} = \lim_{l_{P_0P} \rightarrow 0} \frac{V(P) - V(P_0)}{l_{P_0P}} = \lim_{l_{P_0N} \rightarrow 0} \frac{V(N) - V(P_0)}{l_{P_0N}} \frac{l_{P_0N}}{l_{P_0P}} = \frac{dV}{dn} \cos \alpha, \quad (2.153)$$

unde $\frac{dV}{dn}$ este derivata funcției V după direcția \mathbf{n} .

Din relația (2.153) rezultă că derivata funcției V după o direcție \mathbf{s} depinde numai de unghiul pe care aceasta îl face cu \mathbf{n} . Valoarea maximă se obține pentru $\alpha = 0$ ($\mathbf{s} \equiv \mathbf{n}$), deci \mathbf{n} indică direcția în care funcția V crește cel mai mult. Vectorul având direcția și sensul lui \mathbf{n} și modulul egal cu $\frac{dV}{dn}$ se numește *gradientul funcției scalare* V ,

$$\text{grad}V = \frac{dV}{dn} \mathbf{n}. \quad (2.154)$$

Ținând seama de definiția gradientului (2.154), relația (2.153) devine:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dn} \cos \alpha = \frac{dV}{dn} \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{s} \cdot \text{grad}V, \quad (2.155)$$

sau

$$dV = d\mathbf{s} \cdot \text{grad}V. \quad (2.156)$$

Identificând relațiile (2.151) și (2.156), rezultă că intensitatea câmpului electrostatic \mathbf{E} este egală cu gradientul cu semn schimbat al potențialului V :

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = -\nabla V. \quad (2.157)$$

Semnul minus în membrul drept al relației (2.157) arată că intensitatea câmpului electrostatic este îndreptat dinspre regiunea cu potențial mai ridicat înspre regiunea cu potențial mai scăzut. Acest sens este deci contrar sensului vectorului $\text{grad}V$, deoarece $\text{grad}V$ este îndreptat după direcția și în sensul în care V crește cel mai repede.

2.12.5. Potențialul electrostatic al corpurilor polarizate electric

Dacă se compară expresia intensității câmpului electrostatic stabilită de un mic corp polarizat electric (2.69) cu relația (2.157) se deduce expresia potențialului unui mic corp polarizat electric:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.158)$$

Pentru corpurile polarizate de dimensiuni finite, potențialul V_p se determină cu ajutorul densității de volum a sarcinii de polarizație cu relația (2.144):

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_v \frac{\rho_{vp}}{r} dv. \quad (2.159)$$

2.12.6. Teorema potențialului electrostatic

a. Forma integrală a teoremei potențialului electrostatic. Intensitatea câmpului electrostatic stabilit de sarcina electrică distribuită se calculează cu relația (2.110):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_D} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dq, \quad (2.160)$$

unde D este domeniul pe care este distribuită sarcina electrică.

Dacă se calculează integrala curbilinie a vectorului \mathbf{E} pe o curbă închisă Γ , rezultă:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_D} \int dq \oint_{\Gamma} \frac{\mathbf{r}}{r^3} d\mathbf{s} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_D} \int dq \oint_{\Gamma} \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) d\mathbf{s} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_D} \int dq \oint_{\Gamma} d\left(\frac{1}{r}\right) = 0. \quad (2.161)$$

Relația (2.161),

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0 \quad (2.162)$$

constituie *forma integrală a teoremei potențialului electrostatic: în regim electrostatic integrala de linie a vectorului intensității câmpului electrostatic în lungul oricărui contur închis este egală cu zero.*

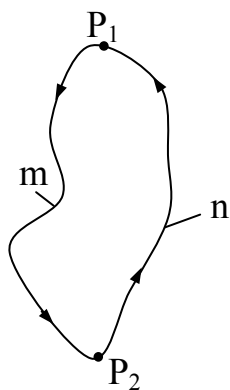


Fig. 2.35

Din relația (2.162) rezultă (fig. 2.35):

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{s} = \oint_{P_1 m P_2 n P_1} \mathbf{E} d\mathbf{s} = \int_{P_1(m)}^{P_2} \mathbf{E} d\mathbf{s} + \int_{P_2(n)}^{P_1} \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0, \quad (2.163)$$

sau,

$$\int_{P_1(m)}^{P_2} \mathbf{E} d\mathbf{s} = - \int_{P_2(n)}^{P_1} \mathbf{E} d\mathbf{s} = \int_{P_1(n)}^{P_2} \mathbf{E} d\mathbf{s}, \quad (2.164)$$

adică, integrala de linie a intensității câmpului electrostatic nu depinde de drumul ales pentru integrare.

b. Forma locală a teoremei potențialului electrostatic. Noțiunea de divergență s-a introdus ca o proprietate locală a câmpului, pornind de la integrala de suprafață pe o suprafață închisă. În același mod, considerăm integrala de linie a vectorului intensitate a câmpului electrostatic pe o curbă închisă Γ care mărginește o suprafață oarecare S_Γ (fig. 2.36, a). Traversăm suprafața S_Γ pe drumul m ,

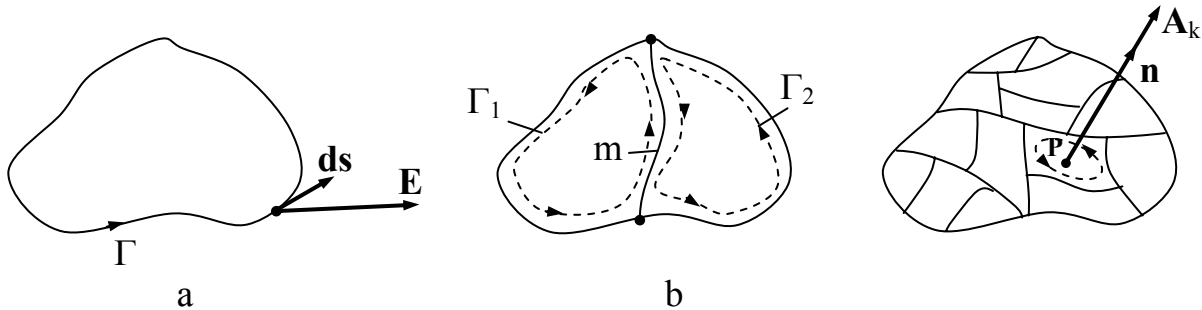


Fig. 2.36

formând două bucle Γ_1 și Γ_2 , ambele cuprinzând drumul m (fig. 2.36, b). Suma circulațiilor vectorului \mathbf{E} pe cele două bucle Γ_1 și Γ_2 , parcurgându-le în același sens, va fi egală cu circulația inițială pe curba Γ , deoarece în cele două integrări drumul m este parcurs în sensuri opuse și, prin urmare, în integrale rămâne doar contribuția acelor părți ale buclelor care împreună formează curba inițială Γ . Dacă se continuă divizarea în bucle mai mici $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, suma integralelor nu se schimbă:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \, ds = \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k} \mathbf{E} \, ds. \quad (2.165)$$

Divizarea conturului are drept scop obținerea la limită a unei caracteristici cantitative locale a câmpului. Micșorând buclele, se micșorează circulația, dar și aria. Este normal, astfel, să considerăm *raportul dintre circulație și aria buclei*, exact cum am procedat atunci când am considerat raportul dintre flux și volum. Totuși, aici situația este puțin diferită, deoarece aria A_k a elementului de suprafață mărginită de curba Γ_k este în realitate un vector (suprafața are o orientare în spațiu) și nu putem lua raportul dintre un scalar și un vector.

Să alegem o orientare pentru elementul de suprafață aflat într-unul din ultimele stadii de divizare. Vectorul unitar \mathbf{n} indică normala la acest element de suprafață și acest vector va rămâne constant la micșorarea drumului din jurul punctului P (fig. 2.36, c). Limita raportului dintre circulație și aria elementului poate fi scrisă astfel:

$$\lim_{A_k \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma_k} \mathbf{E} \, ds}{A_k}. \quad (2.166)$$

Limita obținută în acest fel reprezintă o mărime scalară, asociată punctului P în câmpul vectorial \mathbf{E} și direcției \mathbf{n} . Alegând trei direcții independente $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y,$ și $\mathbf{u}_z,$

obținem trei numere diferite. Rezultă că aceste trei numere pot fi considerate ca fiind componentele unui vector. Acest vector îl numim *rotorul vectorului E*, notat cu $\text{rot}\mathbf{E}$. Cu alte cuvinte, limita obținută pentru o anumită direcție \mathbf{n} , este componenta rotorului vectorului \mathbf{E} pe acea direcție:

$$(\text{rot}\mathbf{E})\mathbf{n} = \lim_{A_k \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma_k} \mathbf{E} \, ds}{A_k}. \quad (2.167)$$

De exemplu, componenta după axa Ox a $\text{rot}\mathbf{E}$ se obține alegând $\mathbf{n} = \mathbf{u}_x$ (fig. 2.37). Bucla Γ_k micșorându-se în jurul punctului P , ea rămâne într-un plan perpendicular pe axa Ox . Dacă vom micșora suprafața în jurul altui punct, raportul dintre circulație și arie va avea altă valoare, depinzând de natura funcției vectoriale. Rezultă că $\text{rot}\mathbf{E}$ este o funcție vectorială de coordonate, a cărei direcție, în orice punct, este normală la planul ce trece prin acel punct pentru care mărimea circulației este maximă. Mărimea rotorului este egală cu valoarea limită a circulației pe unitatea de arie a planului din jurul punctului ales.

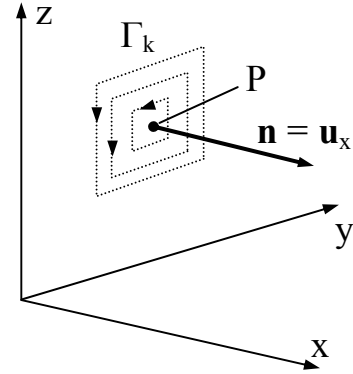


Fig. 2.37

Pornind de la circulația în jurul unei suprafețe infinitezimale, ne putem întoarce la circulația în jurul buclei inițiale Γ . Relația (2.165) se poate scrie sub forma:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \, ds = \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k} \mathbf{E} \, ds = \sum_{k=1}^n A_k \left(\frac{\oint_{\Gamma_k} \mathbf{E} \, ds}{A_k} \right). \quad (2.168)$$

Dacă k crește foarte mult, iar toate ariile A_k se micșorează, mărimea din paranteză devine $(\text{rot}\mathbf{E})\mathbf{n}$, unde \mathbf{n} este vectorul unitate perpendicular pe elementul de suprafață A_k . Astfel, în partea dreaptă a relației (2.168) avem suma produsului dintre componenta normală a $\text{rot}\mathbf{E}$ și aria elementului de suprafață, pentru toate elementele de suprafață care formează suprafața S_{Γ} . Aceasta este integrala de suprafață a vectorului $\text{rot}\mathbf{E}$:

$$\sum_{k=1}^n A_k \left(\frac{\oint_{\Gamma_k} \mathbf{E} \, ds}{A_k} \right) = \sum_{k=1}^n A_k (\text{rot}\mathbf{E})\mathbf{n} \rightarrow \iint_{S_{\Gamma}} \text{rot}\mathbf{E} \, d\mathbf{A}. \quad (2.169)$$

Din (2.168) și (2.169), rezultă:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \, ds = \iint_{S_{\Gamma}} \text{rot}\mathbf{E} \, d\mathbf{A}. \quad (2.170)$$

Relația (2.170) reprezintă *teorema lui Stokes*, care stabilește o relație între integrala de linie a unui vector și integrala de suprafață a rotorului vectorului. Din relațiile (2.162) și (2.170), rezultă:

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0. \quad (2.171)$$

Prin urmare, intensitatea câmpului electrostatic este un *câmp de vectori irotațional*. Rezultă că orice câmp irotațional este un câmp potențial, adică este un câmp care poate fi caracterizat prin funcția scalară V . Reciproc, orice câmp potențial este un câmp irotațional, ceea ce rezultă din identitatea $\text{rot grad}V = 0$ (v. par. 2.12.4).

Relația (2.171) este o condiție suficientă pentru ca un câmp să fie conservativ, adică să poată fi descris de gradientul unei funcții potențiale oarecare (2.157).

Liniile de câmp ale unui câmp potențial cu surse (adică cu rotorul nul și cu divergența diferită de zero) sunt linii deschise care diverg din sursele pozitive ale câmpului (de divergență pozitivă) și converg în sursele negative ale câmpului (de divergență negativă).

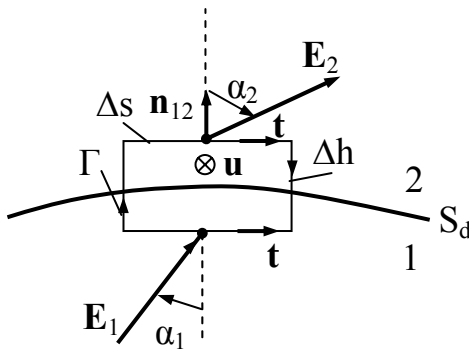


Fig. 2.38

În două puncte infinit apropiate de S_d , intensitățile câmpului electrostatic \mathbf{E}_1 și \mathbf{E}_2 sunt diferite (fig. 2.38). Se consideră conturul Γ de formă dreptunghiulară situat în planul vectorilor \mathbf{E}_1 și \mathbf{E}_2 cu laturile Δs și Δh . La limită pentru $\Delta h \rightarrow 0$, relația (2.162) devine:

$$\mathbf{E}_2 \mathbf{t} \Delta s - \mathbf{E}_1 \mathbf{t} \Delta s = 0, \quad (2.172)$$

sau

$$\mathbf{E}_2 \mathbf{t} - \mathbf{E}_1 \mathbf{t} = 0, \quad (2.173)$$

unde \mathbf{t} este versorul tangențial la S_d .

Pe suprafața de discontinuitate a câmpului electrostatic care separă două medii, componentele tangențiale ale intensității câmpului electrostatic se conservă:

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (2.174)$$

Relația (2.174) constituie *forma locală a teoremei potențialului electrostatic pe suprafețe de discontinuitate*.

2.12.7. Potențialul electrostatic al unor sarcini distribuite

a. *Potențialul electrostatic al unei sfere de rază a încărcată cu sarcină repartizată cu densitate superficială $+\rho_A$ constantă (fig. 2.26).*

Intensitatea câmpului electrostatic într-un punct P situat în exteriorul sferei, la distanța $r > a$, se calculează cu relația (2.112), iar potențialul V_e al punctului se determină cu relația (2.136), alegând punctul de la infinit ca având potențialul nul:

$$V_e = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \frac{q_{\Sigma}}{4\pi\epsilon r}. \quad (2.175)$$

În interiorul sferei potențialul este constant și egal cu potențialul de la periferia sferei ($r = a$):

$$V_i = \frac{q_{\Sigma}}{4\pi\epsilon a}. \quad (2.176)$$

b. *Potențialul electrostatic produs de un fir rectiliniu de lungime finită, uniform încărcat cu densitatea liniară de sarcină ρ_l (fig. 2.27).*

Potențialul elementar dV stabilit de sarcina elementară $\rho_l ds$ se calculează cu relația (2.146):

$$dV = \frac{\rho_l ds}{4\pi\epsilon R} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon} \frac{ds}{\sqrt{s^2 + r^2}}. \quad (2.177)$$

Prin integrare se obține:

$$V = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon} \int_{-s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{s^2 + r^2}} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon} \ln \frac{s_2 + \sqrt{s_2^2 + r^2}}{-s_1 + \sqrt{s_1^2 + r^2}}. \quad (2.178)$$

Se observă că pentru firul de lungime finită potențialul la infinit se anulează, $\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0$.

Pentru firul infinit lung, distribuția de sarcină fiind extinsă până la infinit, potențialul într-un punct la infinit este nenul și deci nu poate fi luat origine a potențialelor. În acest caz, potențialul într-un punct din câmp se calculează cu relația (2.148), integrând intensitatea câmpului electrostatic (2.118) între un punct de referință situat la distanța r_0 de fir și punctul curent situat la distanța r de fir:

$$V = V_0 - \int_{r_0}^r \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r}, \quad (2.179)$$

unde s-a luat $V_0 = 0$.

Potențialul electrostatic al unui fir infinit lung încărcat uniform cu sarcină electrică este proporțional cu logaritmul natural al distanței la fir și se numește *potențial logaritmic*.

c. *Potențialul electrostatic stabilit de sarcina electrică distribuită uniform cu densitate de suprafață $+\rho_A$ pe un cilindru de rază a și infinit de lung (fig. 2.28).*

Potențialul electrostatic într-un punct P situat la distanța $r > a$ se calculează cu relația (2.148), integrând intensitatea câmpului electrostatic (2.120) între un punct de referință situat la distanța r_0 de cilindru și punctul curent P :

$$V = V_0 - \int_{r_0}^r \mathbf{E} \, dr = \frac{a \rho_A}{\epsilon} \ln \frac{r_0}{r}, \quad (2.180)$$

unde $V_0 = 0$.

Potențialul are aceeași expresie cu cea a firului rectiliniu foarte lung și încărcat uniform cu densitatea lineică $\rho_l = 2\pi a \rho_A$ (v. relația 2.179).

d. *Potențialul electrostatic produs de un plan încărcat uniform cu sarcină electrică cu densitatea superficială ρ_A .*

Pentru calculul potențialului electrostatic nu se poate utiliza relația (2.145),

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_S \frac{\rho_A}{r} \, dA, \quad (2.181)$$

deoarece planul este infinit și la infinit potențialul nu poate să tindă spre zero.

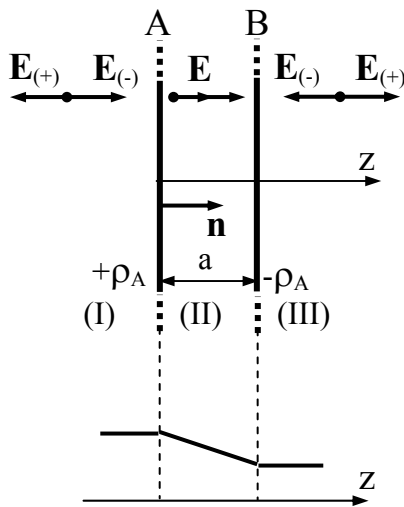


Fig.2.39

Dacă convenim să luăm potențialul planului egal cu zero, potențialul în punctul P situat la distanța z de plan (fig. 2.29) se calculează cu relația (2.148), unde \mathbf{E} se determină cu relația (2.125):

$$V = -\int_0^z \mathbf{E} \, dz = \mp \int_0^z E_z \, dz = \mp \frac{\rho_A}{2\epsilon} z, \quad (2.182)$$

semnul (-) fiind pentru semispațiul $z > 0$ și semnul (+) pentru semispațiul $z < 0$.

e. *Potențialul electrostatic a două plane paralele, infinite, uniform încărcate cu sarcini egale și de semne opuse (fig. 2.39).*

Pentru calculul potențialului electrostatic se ține seama de expresiile intensității câmpului electrostatic în cele trei domenii (v. relațiile 2.130 – 2.132) și se aplică teorema superpoziției, după cum urmează:

$$V_{(I)} = V_A = \text{const.}; \quad (2.183)$$

$$V_{(II)} = V_A - \int_0^z E_{v(II)} \, dz = V_A - \frac{\rho_A}{\epsilon_0} z; \quad (2.184)$$

$$V_{(III)} = V_B = V_A - \frac{\rho_A}{\epsilon_0} a = \text{const.} \quad (2.185)$$

2.13. CONDUCTOARE ÎN CÂMP ELECTROSTATIC

2.13.1. Condiția de echilibru electrostatic

Conductoarele sunt caracterizate prin existența unui număr important de sarcini electrice libere (electronii din metale și ionii din soluții), care sub acțiunea unui câmp electric exterior se pot deplasa ordonat, dând naștere unui curent electric de conducție. Dar, în regim electrostatic nu trebuie să existe o mișcare ordonată a sarcinilor electrice libere. Rezultă că regimul electrostatic în conductoare poate fi realizat numai dacă forța care acționează asupra sarcinilor electrice libere din conductoare este nulă:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = 0, \quad (2.186)$$

adică,

$$\mathbf{E} = 0. \quad (2.187)$$

Relația (2.187) constituie condiția de echilibru electrostatic pentru conductoare omogene din punct de vedere fizic și chimic și neaccelerate: *în regim electrostatic, intensitatea câmpului electrostatic este nulă în interiorul conductoarelor omogene din punct de vedere fizic și chimic și neaccelerate.*

Relația (2.187) implică o serie de consecințe privind câmpul electrostatic în conductoare:

a. În conductoare polarizația fiind neglijabilă, $\mathbf{P} = 0$, inducția electrică este proporțională cu intensitatea câmpului electric,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.188)$$

și deoarece în interiorul conductoarelor $\mathbf{E} = 0$, rezultă că *în regim electrostatic, în interiorul conductoarelor omogene inducția electrică este nulă, $\mathbf{D} = 0$.*

b. Deoarece în interiorul conductoarelor omogene $\mathbf{D} = 0$, rezultă $\text{div} \mathbf{D} = 0$ și în baza teoremei fluxului electric (2.100) se obține:

$$\rho_v = 0, \quad (2.189)$$

adică *în regim electrostatic sarcina electrică care încarcă conductoarele omogene se repartizează exclusiv la suprafața acestora.*

suprafața acestora.

c. Deoarece intensitatea câmpului electrostatic în interiorul conductorului este nulă, din relația (2.157), $\mathbf{E} = -\text{grad}V = 0$ rezultă:

$$V = \text{const.}, \quad (2.190)$$

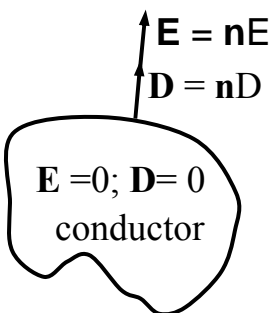


Fig. 2.40

adică, în regim electrostatic orice corp conductor este echipotențial (toate punctele conductorului se află la același potențial). În particular, suprafața conductorului omogen este echipotențială.

d. Deoarece liniile intensității câmpului \mathbf{E} sunt normale la suprafața echipotențială (v. par. 2.12.4), rezultă că în regim electrostatic vectorii \mathbf{E} și \mathbf{D} sunt orientați normal pe suprafața conductorului (fig. 2.40).

e. La trecerea din interiorul spre exteriorul conductorului, la suprafața acestuia intensitatea câmpului electrostatic variază brusc; pe suprafața exterioară a conductorului \mathbf{E} este diferit de zero și este nul în interior. Discontinuitatea vectorului \mathbf{E} se datorează prezenței pe suprafața conductorului a sarcinii electrice

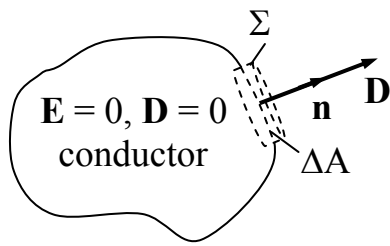


Fig. 2.41

repartizată cu densitatea de suprafață ρ_A (v. punctul b). Considerăm un element de arie ΔA al suprafeței conductorului și o suprafață închisă Σ de forma unui cilindru drept cu bazele paralele cu elementul de arie ΔA și generatoarea perpendiculară pe suprafața conductorului. Cilindrul conține suprafața ΔA și are o bază în conductor, cealaltă bază în dielectricul înconjurător, iar înălțimea este un infinit mic de ordin superior față de dimensiunile bazei (fig. 2.41).

Sarcina elementară conținută în interiorul suprafeței Σ este egală cu sarcina distribuită pe elementul de suprafață ΔA al conductorului, $\Delta q_\Sigma = \rho_A \Delta A$. Deoarece în interiorul conductorului $\mathbf{D} = 0$, fluxul vectorului \mathbf{D} prin suprafața bazei din interiorul conductorului este nul. De asemenea, prin suprafața laterală a cilindrului fluxul vectorului \mathbf{D} este nul, deoarece pe această suprafață vectorii \mathbf{D} și \mathbf{n} sunt perpendiculari (vectorul \mathbf{D} este normal la suprafața conductorului). Prin urmare, fluxul electric prin suprafața cilindrului corespunde exclusiv feței situată în exteriorul conductorului,

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \mathbf{D} \mathbf{n} \Delta A = D \Delta A. \quad (2.191)$$

Aplicând suprafeței Σ teorema fluxului electric, rezultă:

$$D \Delta A = \Delta q_\Sigma = \rho_A \Delta A, \quad (2.192)$$

sau

$$D = \rho_A. \quad (2.193)$$

Prin urmare, pe suprafața conductoarelor omogene intensitatea câmpului electrostatic are numai componentă normală, a cărei expresie se obține din relațiile (2.91) și (2.193):

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_A}{\varepsilon} \mathbf{n}. \quad (2.194)$$

unde \mathbf{n} este versorul normalei orientat de la conductor spre dielectric.

2.13.2. Influență electrostatică

Se consideră un conductor metallic omogen și neîncărcat cu sarcină electrică, situat într-un câmp electrostatic (fig. 2.42, a). Sub acțiunea acestui câmp electrostatic, electronii liberi ai conductorului sunt deplasați în sens opus câmpului, astfel încât la o parte a conductorului apare un exces de sarcină negativă, iar la cealaltă parte o lipsă de sarcină negativă, adică apare o sarcină pozitivă. Deplasarea dirijată de electroni sub acțiunea câmpului electrostatic exterior, se produce până când intensitatea câmpului electrostatic rezultat, obținută din însumarea intensității câmpului electrostatic exterior cu intensitatea câmpului electrostatic produs de repartitia de sarcini pozitive și negative, este nulă, adică până când este îndeplinită condiția de echilibru electrostatic $E = 0$ (fig. 2.42, b). În interiorul conductorului metallic, intensitatea câmpului electrostatic se anulează practic instantaneu și suprafața lui este echipotențială. Datorită sarcinilor care se separă pe suprafața conductorului, forma liniilor de câmp din exteriorul conductorului se modifică. Fenomenul de separare de sarcini electrice pe suprafețele conductoarelor situate în câmp electrostatic se numește *influență electrostatică* sau *inducție electrostatică*. Prin influență electrostatică se induce pe suprafețele conductoarelor izolate sarcini electrice egale și de semne opuse numite *sarcini induse*.

Dacă corpul conductor din figura 2.42, a are o cavitate în interior (fig. 2.42, c), sub acțiunea câmpului electric exterior, sarcina electrică se distribuie numai pe suprafața exterioară a conductorului și deci densitatea de sarcină electrică pe pereții

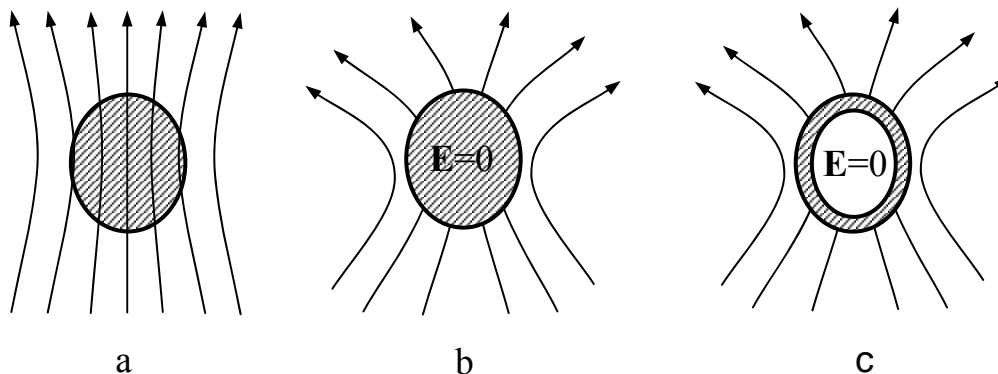


Fig. 2.42

cavității este nulă. Conform relației (2.194), rezultă că în interiorul cavității intensitatea câmpului electrostatic este nulă. Învelișul conductor constituie un *ecran electrostatic* și domeniul protejat de acțiunea câmpului electrostatic din exterior este *ecranat electrostatic*. În majoritatea aplicațiilor practice, ecranele se execută din site metalice. În acest caz, câmpul în interiorul domeniului ecranat va fi foarte slab, exceptând imediata vecinătate a orificiilor sitei metalice. Aceste considerații sunt valabile și pentru câmpurile electrice care variază lent în timp.

2.13.3. Rigiditate dielectrică

Dacă într-un punct al suprafeței unui conductor, intensitatea câmpului electrostatic depășește o anumită valoare, denumită *rigiditate dielectrică*, atunci

sarcinile de pe conductor, sub acțiunea forțelor de natură electrică, pot să părăsească suprafața conductorului și traversează (străpung) dielectricul. În acest caz, regimul nu mai este electrostatic.

2.13.4. Teorema ariilor corespondente

Se consideră un tub de câmp electrostatic limitat între două conductoare 1 și 2 încărcate cu sarcini electrice (fig. 2.43). Suprafața laterală S a tubului nu este străbătută de linii de câmp electric și deoarece în interiorul conductoarelor inducția electrică este nulă, nici prin suprafețele A_1 și A_2 nu trec linii de câmp. Ca urmare, fluxul electric prin suprafața închisă $\Sigma = S \cup A_1 \cup A_2$ este nul,

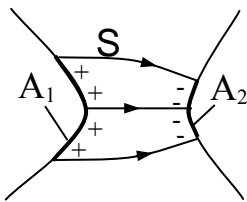


Fig. 2.43

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q_{\Sigma} = q_1 + q_2 = 0 \quad (2.195)$$

și deci

$$q_1 = -q_2. \quad (2.196)$$

Rezultă că sarcina q_1 care încarcă suprafața A_1 a conductorului 1 este egală și de semn opus cu sarcina q_2 care încarcă suprafața A_2 a conductorului 2. Cele două suprafețe A_1 și A_2 se numesc *arii corespondente*.

2.14. CONDENSATOARE ELECTRICE

2.14.1. Condensator electric. Capacitate electrică

Sistemul alcătuit din două conductoare încărcate cu sarcini electrice egale și de semne opuse, separate printr-un dielectric fără polarizație permanentă, constituie un *condensator*, iar cele două conductoare se numesc *armăturile condensatorului*.

Raportul pozitiv dintre sarcina electrică a uneia dintre armături q_1 (q_2) și diferența de potențial față de cealaltă armătură $V_1 - V_2$ ($V_2 - V_1$) se numește *capacitate electrică* a condensatorului,

$$C = \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{q_2}{V_2 - V_1}. \quad (2.197)$$

Se va considera cazul în care dielectricul dintre armături este liniar. În acest caz poate fi aplicată teorema superpoziției. În concordanță cu aceasta, dacă într-o stare de echilibru electrostatic pentru sarcinile q_1 și q_2 corespund potențialele V_1 și V_2 pentru cele două armături, atunci într-o nouă stare de echilibru electrostatic, pentru sarcinile kq_1 și kq_2 corespund potențialele kV_1 și kV_2 . În noua stare de echilibru capacitatea condensatorului este:

$$\frac{kq_1}{kV_1 - kV_2} = \frac{kq_2}{kV_2 - kV_1} = \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{q_2}{V_2 - V_1} = C. \quad (2.198)$$

Prin urmare, dacă dielectricul este liniar, capacitatea electrică a condensatorului nu depinde de sarcinile electrice sau de potențialele armăturilor, ci numai de configurația geometrică a sistemului de armături (forma și dimensiunile acestora, poziția lor relativă etc.) și de permitivitatea dielectricului. Această propoziție constituie *teorema capacității*.

Unitatea SI de capacitate se numește *farad* (F) și este capacitatea condensatorului care sub tensiunea de 1 volt se încarcă cu sarcina electrică de 1 coulomb.

La configurație geometrică a armăturilor și la repartiție a permitivității dielectricului date, capacitatea electrică a condensatorului se calculează astfel:

- se consideră armăturile încărcate cu sarcini egale și de semne opuse, $\pm q$;
- se determină intensitatea câmpului electric într-un punct din dielectric;
- se calculează diferența de potențial $V_1 - V_2$ dintre armătura pozitivă și negativă, egală cu tensiunea U în lungul unei curbe deschise (preferabil linie de câmp electric) care începe pe armătura pozitivă și se termină pe armătura negativă;
- din raportul q/U se deduce capacitatea condensatorului.

Prin capacitatea electrică a unui conductor izolat se înțelege capacitatea electrică a unui conductor față de care toate celelalte conductoare sunt depărtate la infinit. Pentru conductoarele de la infinit se va admite convenția că potențialul electric este nul, adică $V_\infty = 0$. Rezultă:

$$C = \frac{q}{V - V_\infty} = \frac{q}{V}. \quad (2.199)$$

a. Calculul capacității condensatorului plan.

Armăturile condensatorului plan constau din două plăci metalice de arie A ,

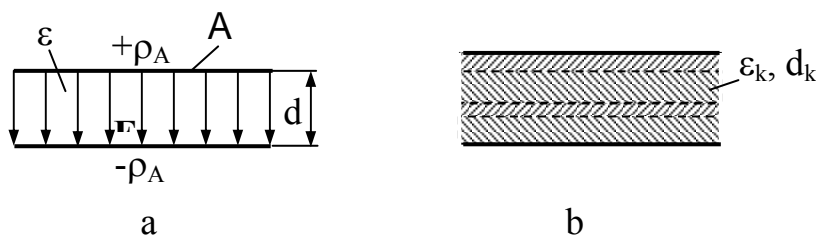


Fig. 2.44

dispuse paralel la distanța d mult mai mică decât dimensiunile armăturilor (fig. 2.44, a). Sarcina electrică este uniform repartizată pe armături, iar domeniul dintre armături este ocupat de un dielectric liniar, izotrop și omogen de permitivitate ϵ constantă.

Ținând seama de relația (2.131) a intensității câmpului electrostatic într-un punct din dielectric, se calculează diferența de potențial dintre armături:

$$V_1 - V_2 = U_{12} = \int_1^2 \mathbf{E} \, ds = \frac{\rho_A}{\varepsilon} d = \frac{q}{\varepsilon A}. \quad (2.200)$$

Aplicând relația de definiție (2.197), se obține capacitatea condensatorului plan:

$$C = \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon A}{d}. \quad (2.201)$$

Dacă dielectricul este constituit din n straturi paralele cu armăturile, având grosimile d_k și permitivitățile ε_k (fig. 2.44, b), rezultă:

$$V_1 - V_2 = U_{12} = \sum_{k=1}^n \int_1^2 \mathbf{E}_k \, ds_k = \sum_{k=1}^n \frac{\rho_A}{\varepsilon_k} d_k = \frac{q}{A} \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{\varepsilon_k}, \quad (2.202)$$

$$C = \frac{A}{\sum_{k=1}^n \frac{d_k}{\varepsilon_k}}. \quad (2.203)$$

b. *Calculul capacității condensatorului cilindric.* Armăturile condensatorului sunt constituite din doi cilindri coaxiali de aceeași lungime ℓ și de raze r_i , r_e , iar dielectricul de permitivitate constantă ε ocupă domeniul dintre armături (fig. 2.45). Sarcina electrică este distribuită uniform cu densitatea de

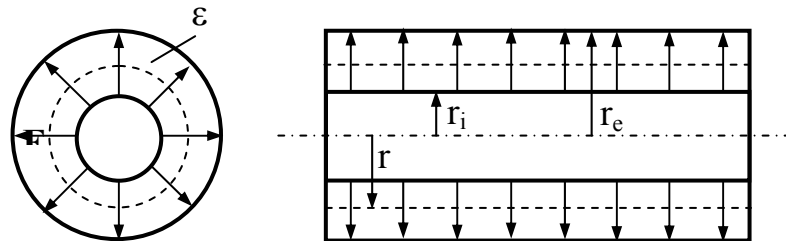


Fig.2.45

suprafață $+\rho_A$ pe armătura interioară și $-\rho_A$ pe armătura exterioară.

Intensitatea câmpului electric în dielectricul dintre armături se calculează cu ajutorul teoremei fluxului electric scrisă pentru suprafața Σ a cilindrului de rază r , ($r_i < r < r_e$):

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \oiint_{\Sigma} D \, dA = 2\pi r \ell \varepsilon E = q, \quad (2.204)$$

de unde rezultă:

$$E = \frac{q}{2\pi \varepsilon r \ell}. \quad (2.205)$$

Diferența de potențial dintre armături se determină calculând integrala lui \mathbf{E} în lungul unei linii de câmp:

$$V_i - V_e = \int_{r_i}^{r_e} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon\ell} \ln \frac{r_e}{r_i}. \quad (2.206)$$

Ținând seama de relația (2.197), se determină capacitatea condensatorului cilindric:

$$C = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln \frac{r_e}{r_i}}. \quad (2.207)$$

Cu ajutorul relației (2.207) se poate calcula capacitatea cablurilor unifilare. În acest caz, conductorul constituie armătura interioară, iar banda metalică de protecție din exterior armătura exterioară. Capacitatea pe unitatea de lungime a cablului se numește capacitate specifică sau lineică și se notează cu C_s :

$$C_s = \frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{r_e}{r_i}}. \quad (2.208)$$

Dacă condensatorul cilindric are dielectricul constituit din $n-1$ tuburi cilindrice coaxiale cu permitivitățile ϵ_k , atunci capacitatea acestuia are expresia:

$$C = \frac{2\pi\ell}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\epsilon_k} \ln \frac{r_{k+1}}{r_k}}. \quad (2.209)$$

2.14.2. Relațiile lui Maxwell pentru sisteme de conductoare în echilibru electrostatic

a. Relațiile lui Maxwell cu referire la coeficienții de potențial. Se consideră n conductoare în echilibru electrostatic încărcate cu sarcini electrice q_k repartizate pe suprafețele Σ_k cu densitățile ρ_{Ak} . Conductoarele sunt situate într-un dielectric omogen, izotrop și liniar de permitivitate constantă ϵ care ocupă întreg spațiul. Potențialul V_j într-un punct de pe suprafața conductorului j are expresia:

$$V_j = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^n \iint_{\Sigma_k} \frac{\rho_{Ak}}{r_{jk}} dA_k; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.210)$$

unde r_{jk} este distanța dintre elementele de suprafață dA_j și dA_k ale conductoarelor j și k .

Multiplicând ambii membri ai ecuației (2.210) cu $\rho_{Aj}dA_j$, integrând pe suprafața Σ_j și fiindcă V_j este constant, se obține:

$$V_j \iint_{\Sigma_j} \rho_{A_j} dA_j = q_j V_j = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^n \iiint_{\Sigma_k} \iiint_{\Sigma_j} \frac{\rho_{A_j} \rho_{A_k}}{r_{jk}} dA_j dA_k, \quad (2.211)$$

sau

$$V_j = \frac{1}{4\pi\epsilon q_j} \sum_{k=1}^n \iiint_{\Sigma_k} \iiint_{\Sigma_j} \frac{\rho_{A_j} \rho_{A_k}}{r_{jk}} dA_j dA_k. \quad (2.212)$$

Relațiile (2.212) se pot scrie sub forma:

$$V_j = \sum_{k=1}^n p_{jk} q_k, \quad (2.213)$$

unde

$$p_{jk} = \frac{1}{4\pi\epsilon q_j q_k} \iiint_{\Sigma_k} \iiint_{\Sigma_j} \frac{\rho_{A_j} \rho_{A_k}}{r_{jk}} dA_j dA_k. \quad (2.214)$$

Coeficienții $p_{jk} = p_{kj}$ sunt independenți de sarcinile și densitățile lor; unei repartiții de sarcină pe conductorul j de λ_j ori mai mare, $\rho'_{A_j} = \lambda_j \rho_{A_j}$ și pe conductorul k de λ_k ori mai mare, $\rho'_{A_k} = \lambda_k \rho_{A_k}$ îi corespunde $q'_j = \lambda_j q_j$, $q'_k = \lambda_k q_k$ și coeficientul p_{jk} este independent de λ_j și λ_k . La permitivitate dată, coeficienții p_{jk} depind numai de configurația geometrică a sistemului de conductoare și se numesc *coeficienți de potențial*. Relațiile (2.213) constituie *relațiile lui Maxwell cu referire la coeficienții de potențial*.

b. Relațiile lui Maxwell cu referire la coeficienții de influență. Dacă se rezolvă sistemul de ecuații (2.213) în raport cu sarcinile q_j se obțin relațiile:

$$q_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} V_k, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.215)$$

sau:

$$\begin{aligned} q_1 &= \gamma_{11} V_1 + \gamma_{12} V_2 + \dots + \gamma_{1n} V_n \\ q_2 &= \gamma_{21} V_1 + \gamma_{22} V_2 + \dots + \gamma_{2n} V_n \\ &\dots \\ q_n &= \gamma_{n1} V_1 + \gamma_{n2} V_2 + \dots + \gamma_{nn} V_n \end{aligned} \quad (2.216)$$

Coeficienții γ_{jk} sunt numiți *coeficienți de influență*, iar relațiile (2.216) se numesc *relațiile lui Maxwell cu referire la coeficienții de influență*. Coeficientul γ_{jj} este pozitiv și egal cu raportul dintre sarcina electrică q_j și potențialul V_j al conductorului j , potențialele V_k ale celorlalte conductoare fiind nule,

$$\gamma_{jj} = \frac{q_j}{V_j} \Big|_{V_k=0, k \neq j} > 0. \quad (2.217)$$

Coeficientul γ_{jk} este negativ și egal cu sarcina electrică indusă pe suprafața conductorului j de potențialul pozitiv egal cu unitatea al conductorului k , potențialele celorlalte conductoare fiind nule. Astfel dacă potențialul conductorului k este pozitiv și liniile de câmp încep de pe conductorul k și se termină pe conductoarele j ($j \neq k$), rezultă $\rho_{Aj} < 0$. În acord cu teorema ariilor corespondente, sarcinile care încarcă ariile corespondente ale conductoarelor j, k fiind egale și de semne opuse, rezultă:

$$\gamma_{jk} = \gamma_{kj} < 0. \quad (2.218)$$

c. Relațiile lui Maxwell cu referire la capacități parțiale. Dacă sistemul de sarcini este complet,

$$\sum_{j=1}^n q_j = 0, \quad (2.219)$$

din relațiile (2.215) rezultă:

$$\sum_{j=1}^n \gamma_{jk} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.220)$$

Relațiile (2.215) se pot scrie sub forma următoare:

$$q_j = -\gamma_{j1}(V_j - V_1) - \gamma_{j2}(V_j - V_2) - \dots - \gamma_{jk}(V_j - V_k) - \dots - \lambda_{jn}(V_j - V_n) + V_j(\gamma_{j1} + \gamma_{j2} + \dots + \gamma_{jk} + \dots + \gamma_{jn}), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.221)$$

Ținând seama de relațiile (2.220), relațiile (2.221) devin:

$$q_j = -\gamma_{j1}(V_j - V_1) - \gamma_{j2}(V_j - V_2) - \dots - \gamma_{jk}(V_j - V_k) - \dots - \gamma_{jn}(V_j - V_n), \quad (2.222)$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

respectiv:

$$\begin{aligned} q_1 &= C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13} + \dots + C_{1k}U_{1k} + \dots + C_{1n}U_{1n}; \\ q_2 &= C_{21}U_{21} + C_{23}U_{23} + \dots + C_{2k}U_{2k} + \dots + C_{2n}U_{2n}; \\ &\dots \\ q_j &= C_{j1}U_{j1} + C_{j2}U_{j2} + \dots + C_{jk}U_{jk} + \dots + C_{jn}U_{jn}; \\ &\dots \\ q_n &= C_{n1}U_{n1} + C_{n2}U_{n2} + \dots + C_{nk}U_{nk} + \dots + C_{n,n-1}U_{n,n-1}, \end{aligned} \quad (2.223)$$

unde

$$C_{jk} = -\gamma_{jk} > 0 \quad (2.224)$$

este *capacitatea parțială* între conductoarele j și k .

Sistemul (2.223) constituie *relațiile lui Maxwell cu referire la capacități parțiale*. Sarcina q_j care încarcă conductorul j este egală cu suma sarcinilor parțiale $C_{jk}(V_j - V_k)$ proporționale cu diferențele de potențial $V_j - V_k$.

2.14.3. Capacități în serviciu

Liniile electrice aeriene și cablurile multifilare de transmisie a energiei sau de telecomunicații funcționează în anumite condiții privind potențialele sau sarcinile electrice care le încarcă. Pentru o linie sau un cablu cu n conductoare având potențiale V_n și sarcinile q_n , pământul fiind conductorul de referință, condițiile de funcționare numite și *de serviciu* sunt:

- Serviciul cu suma tensiunilor tuturor conductoarelor față de pământ, $U_{j0} = U_j$, egală cu zero,

$$\sum_{j=1}^n U_j = 0; \quad (2.225)$$

- Serviciul cu suma tuturor sarcinilor conductoarelor egală cu zero,

$$\sum_{j=1}^n q_j = 0; \quad (2.226)$$

- Serviciul cu toate conductoarele la aceeași tensiune față de pământ,

$$U_1 = U_2 = \dots = U_j = \dots = U_n; \quad (2.227)$$

- Serviciul cu aceeași sarcină pe fiecare conductor,

$$q_1 = q_2 = \dots = q_j = \dots = q_n. \quad (2.228)$$

Capacitatea în serviciu C_{sjk} între conductoarele j și k ale liniei funcționând într-un anumit serviciu, este raportul dintre sarcina unuia dintre conductoarele j sau k și diferența dintre potențialul lui și al celuilalt conductor,

$$C_{sjk} = C_{skj} = \frac{q_j}{V_j - V_k} = \frac{q_k}{V_k - V_j}. \quad (2.229)$$

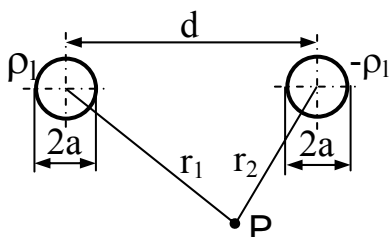


Fig. 2.46

Capacitatea în serviciu a liniei bifilare aeriene. Se consideră două conductoare paralele de lungime ℓ foarte mare și de rază a , situate la distanța $d \gg a$ (fig. 2.46). Conductoarele sunt situate la mare depărtare de pământ și sunt încărcate cu sarcini distribuite lineic, având densitățile ρ_1 și $-\rho_1$.

Potențialul electrostatic într-un punct P se calculează cu relația (2.179) și aplicând teorema superpoziției se obține:

$$V_P = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\rho_1 \ln \frac{r_0}{r_1} - \rho_1 \ln \frac{r_0}{r_2} \right) = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.230)$$

Aducând succesiv punctul P pe suprafața conductoarelor, din relația (2.230) se obțin potențialele celor două conductoare:

$$V_1 = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}; \quad V_2 = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}. \quad (2.231)$$

Capacitatea în serviciu se calculează cu relația (2.229):

$$C_{12} = \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\pi\epsilon_0 \ell}{\ln \frac{d}{a}}, \quad (2.232)$$

iar pentru capacitatea specifică se obține:

$$C_{s12} = \frac{C_{12}}{\ell} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}}. \quad (2.233)$$

2.15. RELAȚIILE FUNDAMENTALE ALE CÂMPULUI ELECTROSTATIC

În cadrul acestui paragraf se reiau unele rezultate obținute în paragrafele precedente și care constituie relațiile fundamentale ale electrostaticii. Aceste relații sunt:

- relația dependenței dintre inducție, intensitate și polarizație în câmp electrostatic (2.86),

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.234)$$

respectiv (2.91),

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.235)$$

pentru dielectricii liniari izotropi și omogeni, fără polarizație permanentă;

- teorema fluxului electric sub formă integrală (2.93), respectiv locală (2.100),

$$\Psi_\Sigma = \oiint_{\Sigma} \mathbf{D} \mathbf{n} dA = q_\Sigma, \quad \text{div} \mathbf{D} = \rho_v; \quad (2.236)$$

- teorema potențialului electrostatic, sub formă integrală (2.162), respectiv locală (2.171):

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = 0, \quad \text{rot} \mathbf{E} = 0; \quad (2.237)$$

- consecință a teoremei potențialului electrostatic (2.157),

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V, \quad (2.238)$$

unde V este potențialul electrostatic;

- relația de echilibru electrostatic pentru medii conductoare omogene (1.187):

$$\mathbf{E} = 0. \quad (2.239)$$

În concordanță cu cele arătate în paragraful 2.9.1, în cazul câmpului electrostatic, liniile de câmp electric sunt linii deschise care încep și se termină în punctele în care divergența vectorului \mathbf{E} este diferită de zero. După cum rezultă din relațiile (2.234), (2.235) și (2.236), mărimea $\text{div} \mathbf{E}$ poate fi diferită de zero în punctele în care densitatea de sarcină electrică adevărată este diferită de zero sau în punctele în care mărimea $\text{div} \mathbf{P}$ este diferită de zero, respectiv în punctele în care variază permitivitatea. De asemenea, în cazul câmpului electrostatic, liniile de inducție electrică sunt linii deschise care încep și se termină în punctele în care divergența vectorului \mathbf{D} este diferită de zero. Mărimea $\text{div} \mathbf{D}$ poate fi diferită de zero numai în punctele în care densitatea de sarcină electrică adevărată este diferită de zero.

2.15.1. Ecuațiile lui Poisson și Laplace pentru potențialul electrostatic

În cazul dielectricilor liniari, fără polarizație electrică permanentă din ecuațiile (2.236), (2.235) și (2.238) se obține:

$$\begin{aligned} \rho_v &= \text{div} \mathbf{D} = \text{div}(\epsilon \mathbf{E}) = -\text{div}(\epsilon \text{grad}V) = \\ &= -\epsilon \text{div}(\text{grad}V) - \text{grad}V \text{grad} \epsilon = -\epsilon \Delta V - \text{grad}V \text{grad} \epsilon, \end{aligned} \quad (2.240)$$

sau

$$\Delta V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \text{grad} \epsilon \text{ grad} V. \quad (2.241)$$

Dacă, în plus, dielectricii sunt omogeni, permitivitatea este constantă și ecuația (2.241) devine:

$$\Delta V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}. \quad (2.242)$$

Oricare dintre ecuațiile (2.241), (2.242) este de tip eliptic neomogenă și se numește *ecuația lui Poisson*. Partea neomogenă a ecuației lui Poisson, reprezentată de densitatea de sarcină electrică, constituie *sursa câmpului electrostatic*.

Conform celor arătate în paragraful 2.12.2, în cazul dielectricilor liniari, fără polarizație electrică permanentă, potențialul electrostatic determinat într-un punct

oarecare din dielectric de sarcina electrică distribuită cu densitate de volum ρ_v într-un domeniu finit, când se poate alege potențialul punctului de la infinit nul, este dat de relația (2.144):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_v \frac{\rho_v}{r} dv. \quad (2.243)$$

Pe de altă parte, în aceleași condiții de mediu, potențialul electrostatic satisface ecuația de tip Poisson (2.242) a cărei soluție are tocmai expresia (2.243).

Dacă $\rho_v = 0$, ecuația omogenă se numește *ecuația lui Laplace*,

$$\Delta V = 0. \quad (2.244)$$

În general, rezolvarea ecuațiilor Poisson și Laplace nu se referă la întreg spațiul, deoarece acesta nu este întotdeauna accesibil în întregime. De aceea, apare necesitatea rezolvării ecuațiilor numai pentru un anumit domeniu v_Σ pe a cărui frontieră Σ sunt date în fiecare punct anumite condiții, numite *condiții la limită* sau *pe frontieră*. Prin condiții pe frontiera domeniului se înțeleg valorile care pot fi prescrise pentru potențialul scalar V , derivate ale acestuia sau combinațiile lor, încât soluția să fie unică.

2.15.2. Formulele lui Green pentru câmpuri de scalari

Fie U și V două câmpuri de scalari diferite în domeniul v_Σ . Aplicând teorema divergenței fluxului vectorului $U \text{ grad} V$, se obține prima formulă a lui Green pentru câmpuri de scalari:

$$\oiint_\Sigma U \text{ grad} V \mathbf{n} dA = \iiint_{v_\Sigma} \text{div}(U \text{ grad} V) dv = \iiint_{v_\Sigma} (U \Delta V + \text{grad} U \text{ grad} V) dv. \quad (2.245)$$

Pentru $U = V$, relația (2.245) devine:

$$\oiint_\Sigma V \text{ grad} V \mathbf{n} dA = \iiint_{v_\Sigma} [V \Delta V + (\text{grad} V)^2] dv. \quad (2.246)$$

Înlocuind în relația (2.245) U cu V și V cu U se obține:

$$\oiint_\Sigma V \text{ grad} U \mathbf{n} dA = \iiint_{v_\Sigma} \text{div}(V \text{ grad} U) dv = \iiint_{v_\Sigma} (V \Delta U + \text{grad} V \text{ grad} U) dv. \quad (2.247)$$

Scăzând membru cu membru relațiile (2.245) și (2.247) se obține a doua formulă a lui Green pentru câmpuri de scalari:

$$\oiint_\Sigma (U \text{ grad} V - V \text{ grad} U) \mathbf{n} dA = \iiint_{v_\Sigma} (U \Delta V - V \Delta U) dv. \quad (2.248)$$

2.15.3. Condițiile pe frontieră pentru potențialul scalar

Fie $V_1(P)$ și $V_2(P)$ două soluții diferite ale ecuației lui Poisson în domeniul v_Σ cu aceleași condiții pe frontiera Σ a domeniului. Ca urmare, în interiorul domeniului v_Σ sunt îndeplinite relațiile:

$$\Delta V_1(P) = -\frac{\rho_v(P)}{\varepsilon}; \quad \Delta V_2(P) = -\frac{\rho_v(P)}{\varepsilon}; \quad P \in v_\Sigma. \quad (2.249)$$

Mărimea diferență

$$V_d(P) = V_1(P) - V_2(P), \quad P \in v_\Sigma \cup \Sigma \quad (2.250)$$

satisfacă ecuația lui Laplace (2.244)

$$\Delta V_d(P) = \Delta V_1(P) - \Delta V_2(P) = 0, \quad P \in v_\Sigma, \quad (2.251)$$

cu condiții pe frontieră nule, deoarece cele două soluții au aceleași condiții pe frontiera Σ .

Scriind prima formulă a lui Green (2.246) pentru scalarul $V_d(P)$, se obține:

$$\oint_{\Sigma} V_d \operatorname{grad} V_d \mathbf{n} dA = \iiint_{v_\Sigma} [V_d \Delta V_d + (\operatorname{grad} V_d)^2] dv. \quad (2.252)$$

Integrandul primului membru al relației (2.252) conține valorile lui $V_d(P)$ și $\operatorname{grad} V_d(P)$, nule pe frontiera Σ . Integrandul se anulează pentru $V_d(P) = 0$ sau $\mathbf{ngrad} V_d = 0$. Ca urmare, condițiile pe frontieră pentru ecuațiile scalare Poisson și Laplace sunt:

- de tip *Dirichlet* sau de prima speță, dacă se prescriu pe frontieră valorile potențialului $V(P)$, $P \in \Sigma$;
- de tip *Neumann* sau de a doua speță, dacă se prescriu valorile componenteii normale a gradientului de potențial $\mathbf{ngrad} V$, $P \in \Sigma$;
- de tip *Robin* sau de a treia speță, dacă în fiecare punct de pe frontieră este dată o relație liniară în raport cu $V(P)$ și $\mathbf{ngrad} V$,

$$a(P)V(P) + b(P)\frac{\partial V}{\partial n} = c(P), \quad P \in \Sigma, \quad (2.253)$$

unde $a(P)$, $b(P)$ și $c(P)$ sunt funcții de punct definite pe frontiera Σ și nenule.

Condiția pe frontieră este *omogenă* sau *naturală* dacă $c(P) = 0$ și *neomogenă* dacă $c(P) \neq 0$.

2.15.4. Teorema unicității soluțiilor ecuațiilor Poisson și Laplace pentru potențialul scalar

Enunțul teoremei este următorul: *soluțiile ecuațiilor Poisson (2.242) și Laplace (2.244) cu condiții pe frontieră de tip Dirichlet sunt unice și cu condiții de tip Neumann sunt unice până la o constantă aditivă.*

Pentru demonstrarea teoremei se continuă raționamentul de la paragraful precedent. În relația (2.252) integrandul primului membru este nul în ambele

probleme, fie de tip Dirichlet fie de tip Neumann. Deoarece $\Delta V_d(P) = 0$, $P \in v_\Sigma$ (2.251), relația (2.252) devine:

$$\iiint_{v_\Sigma} (\text{grad} V_d)^2 dv = 0. \quad (2.254)$$

Deoarece gradientul funcției V_d apare în expresia de sub integrală la pătrat, relația (2.254) nu poate fi satisfăcută decât dacă:

$$\text{grad} V_d = 0. \quad (2.255)$$

Din relația (2.255) se obține:

$$V_d(P) = C, \quad (2.256)$$

unde C este o constantă.

În problema Dirichlet, V_d fiind nul pe frontiera Σ , rezultă $C = 0$, $V_1(P) = V_2(P)$, $P \in v_\Sigma \cup \Sigma$ și soluția este unică. În problema Neumann, $V_1(P) - V_2(P) = C$ și soluția este unică până la o constantă aditivă C .

În relația (2.252) integrandul primului membru se anulează numai dacă $V_d(P) = 0$, care implică condiția Dirichlet, sau dacă $\text{grad} V_d = 0$, care implică condiția Neumann. În acest fel, cele două condiții sunt impuse de necesitatea stabilirii unicității soluției.

2.16. METODE DE ANALIZĂ A CÂMPULUI ELECTROSTATIC

Se consideră în domeniul dielectric v_Σ mărginit de suprafața Σ un sistem de conductoare în echilibru electrostatic. Analiza câmpului electrostatic constă din determinarea intensității câmpului și potențialului în orice punct din dielectric, respectiv a potențialelor conductoarelor, fiind cunoscute sarcinile care le încarcă. Problema inversă constă din determinarea sarcinilor conductoarelor atunci când potențialele acestora sunt cunoscute. În ambele probleme se presupun cunoscute condițiile pe frontieră, de tip Dirichlet sau Neumann. De asemenea, metodele de analiză permit calculul capacităților.

În general, soluțiile problemelor de câmp electrostatic sunt funcții de toate coordonatele spațiale și problemele se numesc *tridimensionale*. Dacă soluțiile depind numai de două, respectiv numai de o coordonată spațială, problemele se numesc *bidimensionale*, respectiv *unidimensionale*. O clasă de probleme bidimensionale o constituie problemele *plan paralele*. În acest caz, mărimile câmpului sunt aceleași în punctele reperate identic în planele normale pe o axă și nu depind de coordonata în lungul axei. O altă clasă de probleme bidimensionale o constituie cele cu *simetrie axială*. Într-un sistem de coordonate cilindrice (r, φ, z), soluția unei probleme cu simetrie axială nu depinde de coordonata unghiulară φ .

Metodele de analiză a câmpului electrostatic se clasifică în metode analitice, numerice, grafice [10,13] și analogice [10,13].

2.16.1. Metode analitice de calcul a câmpului electrostatic

Dezavantajul metodelor analitice constă din numărul relativ redus de configurații de câmp în care pot fi aplicate.

Principalele metode analitice sunt: metoda directă, metoda integrării ecuațiilor Poisson și Laplace prin separarea variabilelor, metoda imaginilor electrice, metoda funcțiilor de variabilă complexă, metoda inversiunii geometrice [10], metoda transformării conforme [10,13], metoda funcțiilor Green [10].

a. Metoda directă se aplică, în principal, pentru repartiții de sarcină în dielectricul izotrop, liniar și omogen de permitivitate constantă care ocupă spațiul infinit sau domenii finite mărginite de suprafețe echipotențiale. Această metodă constă în calculul intensității câmpului electric și a potențialului utilizând teorema lui Coulomb, teorema superpoziției și teorema fluxului electric. Aplicații ale metodei directe au fost prezentate în paragrafele 2.10.3 și 2.12.7.

b. Metoda imaginilor electrice. Metoda imaginilor electrice se aplică pentru calculul câmpurilor produse de surse date într-un domeniu omogen și izotrop mărginit de suprafețe de discontinuitate (de exemplu, suprafața de separație dintre doi dielectrici sau un conductor și un dielectric). Principiul metodei este următorul: se consideră sursele date situate în mediul omogen și izotrop care se presupune infinit extins (adică se suprimă suprafețele de discontinuitate) și se introduc surse suplimentare, echivalente cu suprafețele de discontinuitate suprimate, în ceea ce privește contribuția la producerea câmpului în domeniul dat. Determinarea câmpului într-un domeniu mărginit se reduce astfel la problema

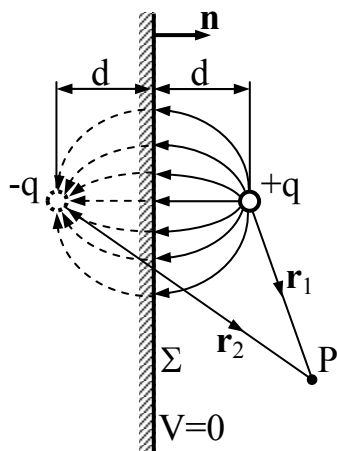


Fig. 2.47

determinării câmpului produs de surse într-un domeniu omogen și izotrop infinit extins. Dificultatea problemei constă în determinarea poziției și a valorilor surselor suplimentare astfel încât să fie satisfăcută condiția de echivalență amintită, adică să se mențină condițiile de unicitate. Sursele suplimentare sunt numite *surse imagini*, respectiv *imagini electrice*. Aceste surse trebuie determinate astfel încât să rămână neschimbate condițiile pe frontiera interioară a domeniului dat. Sursele imagini sunt situate, de obicei, în afara domeniului dat. Aceste surse nu sunt în general univoc determinate.

Metoda imaginilor electrice în raport cu semispațiul conductor. Se consideră o sarcină punctiformă $q > 0$ situată într-un dielectric omogen de permitivitate ϵ , la distanța d de un conductor infinit care ocupă semispațiul din stânga (fig. 2.47). Considerăm

nul potențialul conductorului. În acest caz, suprafața de discontinuitate este suprafața de separație plană dintre conductor și dielectricul de permitivitate ϵ . Toate liniile intensității câmpului electric care încep pe sarcina $+q$ se termină pe conductorul plan, pe care apare o sarcină indusă negativă. Câmpul electric este determinat atât de sarcina $+q$, cât și de sarcina indusă distribuită pe suprafața planului conductor. Din condițiile problemei nu se cunoaște distribuția sarcinii induse, aceasta urmând a fi determinată.

Problema calculului câmpului se rezolvă aplicând metoda imaginilor electrice. Să presupunem că înlăturăm conductorul, dar pe prelungirea perpendiculară coborâtă din punctul în care se află sarcina $+q$ pe suprafața conductorului aducem, la aceeași distanță d de suprafața conductorului, o sarcină imagine $-q$ (dielectricul omogen ocupând acum întregul spațiu). Poziția sarcinii electrice imagine coincide cu poziția imaginii optice virtuale care s-ar obține dacă suprafața conductorului ar fi înlocuită cu o oglindă plană și de aici provine și denumirea metodei.

Într-un punct oarecare P , potențialul V este stabilit de sarcina punctiformă $+q$ și de sarcina imagine $-q$:

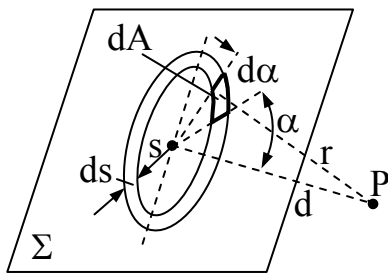


Fig. 2.48

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (2.257)$$

În acest caz, într-un punct al planului Σ ($r_1 = r_2$), care coincidea înainte cu suprafața conductorului, potențialul este nul. Ca urmare, pentru domeniul D , constituit de semispațiul din dreapta și numai pentru el, avem o perfectă identitate în privința datelor problemelor în ambele situații: sarcina $+q$ în prezența planului conductor și sarcinile $+q$ și $-q$. În

conformitate cu teorema unicității, câmpul în domeniul D este univoc determinat de distribuția sarcinilor și de condițiile de frontieră. Dar, în cele două situații, în semispațiul din dreapta, distribuția sarcinilor este aceeași (sarcina $+q$ la distanța d de plan) și condițiile de frontieră sunt aceleași (planul Σ este echipotențial și de potențial nul). Deci, în loc de a rezolva problema “sarcina $+q$ în prezența planului conductor”, rezolvăm problema “sarcinile $+q$ și $-q$ ”, care este mai simplă.

Intensitatea câmpului electric \mathbf{E} într-un punct P se exprimă pe baza teoremei superpoziției:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right). \quad (2.258)$$

În punctele suprafeței planului ($r_1 = r_2 = r$), intensitatea câmpului electric este:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (2.259)$$

Dacă \mathbf{n} este versorul normalei pe plan (fig. 2.48), atunci $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -2d\mathbf{n}$ și deci intensitatea câmpului electric este normală pe suprafața planului:

$$\mathbf{E} = -\frac{qd}{2\pi\epsilon r^3}\mathbf{n}. \quad (2.260)$$

Densitatea de suprafață a sarcinii electrice induse pe suprafața planului conductor este egală cu componenta normală a inducției electrice în punctele din dielectric situate în imediata vecinătate a planului:

$$\rho_A = D_n = \epsilon E_n = -\frac{qd}{2\pi r^3}. \quad (2.261)$$

Pe suprafața conductorului se separă prin influență electrostatică sarcina negativă, a cărei densitate superficială tinde spre zero în punctele planului foarte depărtate de sarcina $+q$. Sarcina indusă este maximă în piciorul perpendicularei dusă din punctul în care se află sarcina $+q$ pe plan:

$$\rho_A = -\frac{q}{2\pi d^2}. \quad (2.262)$$

Sarcina totală a planului este:

$$q_\Sigma = \iint_\Sigma \rho_A dA = -\frac{qd}{2\pi} \iint_\Sigma \frac{dA}{r^3}. \quad (2.263)$$

Din figura 2.48 rezultă $dA = s ds d\alpha$, $r^2 = s^2 + d^2$ și deci relația (2.263) devine:

$$q_\Sigma = -\frac{qd}{2\pi} \int_0^\infty \frac{s ds}{(s^2 + d^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\alpha = -qd \left| -\frac{1}{\sqrt{s^2 + d^2}} \right|_0^\infty = -q. \quad (2.264)$$

Prin urmare, sarcina totală a planului q_Σ este egală cu sarcina imagine $-q$.

Aplicație. *Capacitatea în serviciu a liniei bifilare aeriene.* Se consideră linia constituită din două conductoare cilindrice de rază a dispuse paralel cu solul la distanțele $h_1, h_2 \gg a$. Conductoarele sunt încărcate cu sarcini distribuite liniar având densitățile ρ_1 și $-\rho_1$ și sunt dispuse paralel la distanța $d \gg a$ (fig. 2.49).

Introducând conductoarele imagini 1' și 2' încărcate cu sarcinile $-\rho_1$ și ρ_1 și cunoscând potențialul produs de un fir rectiliniu uniform încărcat și infinit extins (2.179), potențialul într-un punct P din dielectricul situat deasupra solului se calculează aplicând principiul superpoziției:

$$V_p = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon} \left(\ln \frac{r_1'}{r_1} + \ln \frac{r_2}{r_2'} \right). \quad (2.265)$$

Potențialele celor două conductoare 1 și 2 se determină deplasând punctul P pe suprafețele acestora. Astfel, pentru conductorul 1:

$$r_1 = a; r_1' = 2h_1; r_2 = d' = \sqrt{(h_2 - h_1)^2 + d^2}; r_2' = d'' = \sqrt{(h_1 + h_2)^2 + d^2}, \quad (2.266)$$

iar pentru conductorul 2:

$$r_1 = d' = \sqrt{(h_2 - h_1)^2 + d^2}; r_1' = d'' = \sqrt{(h_1 + h_2)^2 + d^2}; r_2 = a; r_2' = 2h_2. \quad (2.267)$$

Introducând succesiv relațiile (2.266) și (2.267) în expresia (2.265), se obțin potențialele conductoarelor 1 și 2:

$$V_1 = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h_1}{a} \frac{\sqrt{(h_2 - h_1)^2 + d^2}}{\sqrt{(h_2 + h_1)^2 + d^2}}; \quad V_2 = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{a}{2h_2} \frac{\sqrt{(h_2 + h_1)^2 + d^2}}{\sqrt{(h_2 - h_1)^2 + d^2}} \quad (2.268)$$

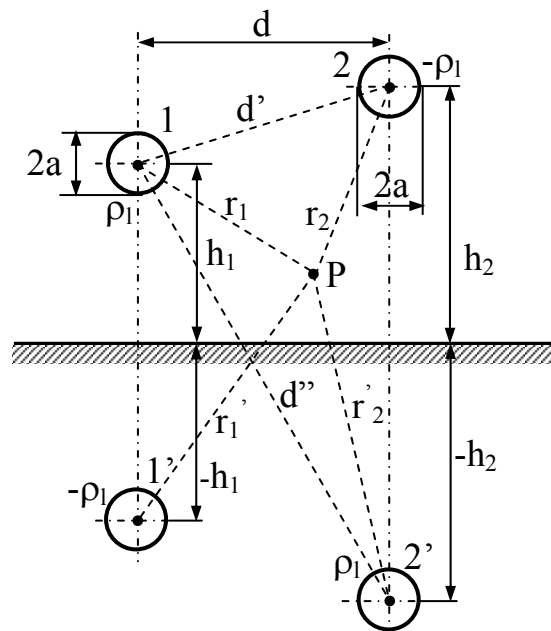


Fig. 2.49

și apoi din raportul $\frac{\rho_1 \ell}{V_1 - V_2}$ se determină capacitatea în serviciu C_{12} , respectiv capacitatea specifică C_{s12} :

$$C_{12} = \frac{\pi \varepsilon \ell}{\ln \frac{2\sqrt{h_1 h_2}}{a} \frac{\sqrt{(h_2 - h_1)^2 + d^2}}{\sqrt{(h_2 + h_1)^2 + d^2}}}; \quad C_{s12} = \frac{\pi \varepsilon}{\ln \frac{2\sqrt{h_1 h_2}}{a} \frac{\sqrt{(h_2 - h_1)^2 + d^2}}{\sqrt{(h_2 + h_1)^2 + d^2}}}. \quad (2.269)$$

Notând cu $D = \sqrt{(h_2 - h_1)^2 + d^2}$ și la limită pentru $h_1, h_2 \rightarrow \infty$ se regăsește capacitatea liniei bifilare la mare depărtare de pământ (2.233).

c. Metoda integrării ecuațiilor Poisson și Laplace prin separarea variabilelor.

Soluția generală a ecuației Poisson (2.242), $\Delta V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$, conține doi termeni:

$$V = V_p + V_0, \quad (2.270)$$

unde V_p este o soluție particulară a ecuației neomogene, iar V_0 este soluția ecuației Laplace (2.244), $\Delta V = 0$.

În problema plană, în sistemul de coordonate carteziene, ecuația Laplace devine:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (2.271)$$

În metoda separării variabilelor, soluția ecuației (2.271) este o serie ai cărei termeni sunt produse a două funcții $X(x)$ și $Y(y)$,

$$V(x, y) = X(x)Y(y). \quad (2.272)$$

Introducând soluția (2.272) în ecuația (2.271) și împărțind prin XY , se obține:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0. \quad (2.273)$$

Fiecare dintre termenii ecuației (2.273) depinde numai de una dintre coordonate și ecuația se descompune în două ecuații prin egalarea fiecărui termen cu o constantă,

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda^2; \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \lambda^2. \quad (2.274)$$

Soluțiile ecuațiilor (2.274) fiind:

$$X = \begin{cases} A_\lambda \sin \lambda x + B_\lambda \cos \lambda x, & \lambda \neq 0, \\ A_0 x + B_0, & \lambda = 0, \end{cases}; \quad Y = \begin{cases} C_\lambda \operatorname{sh} \lambda y + D_\lambda \operatorname{ch} \lambda y, & \lambda \neq 0, \\ C_0 y + D_0, & \lambda = 0, \end{cases} \quad (2.275)$$

soluția $V(x, y)$ este următoarea:

$$V(x, y) = (A_0 x + B_0)(C_0 y + D_0) +$$

$$+ \sum_{\lambda} (A_{\lambda} \sin \lambda x + B_{\lambda} \cos \lambda x)(C_{\lambda} \operatorname{sh} \lambda y + D_{\lambda} \operatorname{ch} \lambda y). \quad (2.276)$$

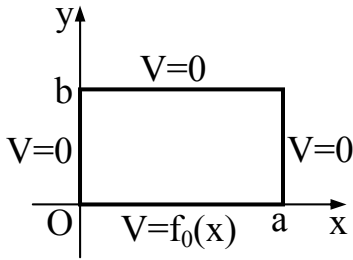


Fig.2.50

Aplicație. Problema Dirichlet pentru interiorul dreptunghiului (fig.2.50). Se consideră domeniul din interiorul dreptunghiului de laturi a , b . Potențialul pe latura $y = 0$ este $V(x,0) = f_0(x)$ și nul pe celelalte laturi. Din condiția $V(0,y) = V(a,y) = 0$ rezultă $A_0 = B_0 = D_0$

$= B_{\lambda} = 0$, $\sin \lambda a = 0$ și deci $\lambda = \frac{k\pi}{a}$, $k = 1, 2, \dots$ Pe latura y

$= b$, condiția $V(x,b) = 0$ este satisfăcută dacă

$C_{\lambda} \operatorname{sh} \lambda y + D_{\lambda} \operatorname{ch} \lambda y = E_{\lambda} \operatorname{sh} \lambda (b - y)$. Prin urmare, soluția (2.276) devine:

$$V(x, y) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} E_{\lambda} \sin \lambda x \operatorname{sh} \lambda (b - y) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin k\pi \frac{x}{a} \operatorname{sh} k\pi \frac{b - y}{a}. \quad (2.277)$$

Constantele M_k se determină din condiția $V(x,0) = f_0(x)$, adică:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin k\pi \frac{x}{a} \operatorname{sh} k\pi \frac{b}{a} = f_0(x). \quad (2.278)$$

Multiplicând ambii membri cu $\sin k\pi \frac{x}{a}$ și integrând între 0 și a se obține:

$$M_k = \frac{2}{a \operatorname{sh} k\pi \frac{b}{a}} \int_0^a f_0(x) \sin k\pi \frac{x}{a} dx. \quad (2.279)$$

De exemplu, pentru $f_0(x) = V_0$, rezultă $M_{2k} = 0$, $M_{2k+1} = \frac{4V_0}{(2k+1)\pi \operatorname{sh}(2k+1)\pi \frac{b}{a}}$ și

potențialul electrostatic într-un punct din interiorul dreptunghiului are expresia:

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{a} (b-y)}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi b}{a}}. \quad (2.280)$$

2.16.2. Metode numerice de calcul a câmpului electrostatic

Metodele numerice se bazează pe aproximarea prin discretizare a ecuațiilor cu derivate parțiale sau a ecuațiilor integrale prin sisteme de ecuații algebrice. În

ambele cazuri, sistemul de ecuații algebrice care se obține se numește *discretizantul* ecuației cu derivate parțiale sau ecuației integrale.

Comparativ cu metodele analitice, cele numerice prezintă o arie de aplicabilitate mai mare, fiind supuse la restricții mai puține. Deși aproximative, metodele numerice (dacă satisfac anumite criterii calitative de rigoare și convergență) conduc cu aceeași certitudine ca și metodele directe la rezultate acceptabile. Principalele metode numerice sunt:

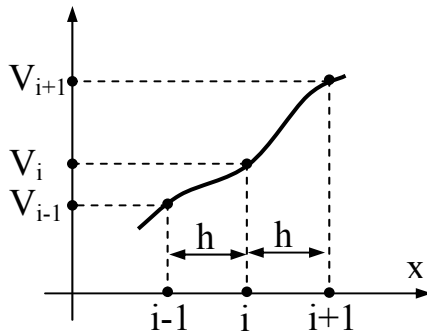


Fig. 2.51

- metoda diferențelor finite (MDF);
- metoda elementelor finite (MEF).

a. Metoda diferențelor finite (MDF). În metoda diferențelor finite se aproximează ecuațiile cu derivate parțiale (Poisson și Laplace) prin ecuații cu diferențe finite care conțin valorile funcției necunoscute în puncte distincte, distribuite în interiorul domeniului, în nodurile unei rețele având o anumită structură. În consecință, în MDF în loc de a calcula funcția necunoscută în orice punct din domeniu, se calculează numai valorile ei în nodurile rețelei în care a fost divizat domeniul.

Pe frontieră, în loc de a se considera toate valorile funcției sau componenteii normale a gradientului acesteia, se iau în considerare numai valorile din punctele situate la intersecția frontierei cu rețeaua de divizare.

Aproximarea funcțiilor și a derivatelor lor prin diferențe finite. Se consideră funcția $V(x)$ definită pe intervalul $[a,b]$, discretizat cu pasul constant $h = \frac{b-a}{n}$ (fig.2.51). Extremitățile subintervalelor se numesc *noduri* și se numerotează de la stânga la dreapta cu $0, 1, 2, 3, \dots, i-1, i, i+1, \dots, n$ incluzându-se și cele două valori extreme. Fie $V_0, V_1, V_2, \dots, V_{i-1}, V_i, V_{i+1}, \dots, V_n$ valorile funcției în cele $n+1$ noduri. Șirul $\{V_i\}$ poate fi considerat drept aproximarea funcției $V(x)$ definită în nodurile de discretizare. Dacă soluția unei ecuații diferențiale este reprezentată de funcția $V(x)$, ea poate fi aproximată prin tabelul de valori $\{V_i\}$ ale soluției.

Pentru nodul i se definesc următoarele diferențe finite de ordinul unu ale funcției $V(x)$:

- *diferența finită regresivă* (sau înapoi):

$$\nabla_i^- V = V_i - V_{i-1}; \quad (2.281)$$

- *diferența finită progresivă* (sau înainte):

$$\nabla_i^+ V = V_{i+1} - V_i; \quad (2.282)$$

- *diferența finită simetrică* (sau centrală) de ordinul I:

$$\hat{\nabla}_i V = V_{i+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2}}, \quad (2.283)$$

unde $V_{i+\frac{1}{2}}$ și $V_{i-\frac{1}{2}}$ sunt valorile funcției $V(x)$ la jumătatea intervalelor adiacente nodului i .

Pentru aproximarea derivatelor funcției V prin diferențe finite, se dezvoltă funcția $V(x)$ în serie Taylor în nodurile învecinate nodului i :

$$V_{i+1} = V_i + h \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \dots \quad (2.284)$$

$$V_{i-1} = V_i - h \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} - \dots \quad (2.285)$$

Neglijând mărimile mici, superioare celor de ordinul al treilea, din diferența, respectiv suma relațiilor (2.284) și (2.285), rezultă:

$$V_{i+1} - V_{i-1} = 2h \frac{\partial V_i}{\partial x}; \quad V_{i+1} + V_{i-1} = 2V_i + h^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \dots \quad (2.286)$$

Din relațiile (2.286) se obțin aproximările derivatelor de ordinul unu și doi ale funcției $V(x)$ prin diferențe finite:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \frac{1}{2h} (V_{i+1} - V_{i-1}); \quad (2.287)$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} (V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}). \quad (2.288)$$

Pentru aproximarea ecuației lui Poisson pentru potențialul scalar în problema plan – paralelă, domeniul de câmp se discretizează într-o rețea rectangulară, având pașii $h_x = h_y = h$ (fig. 2.52). A aproxima laplaceanul

$$\Delta V(x, y) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad (2.289)$$

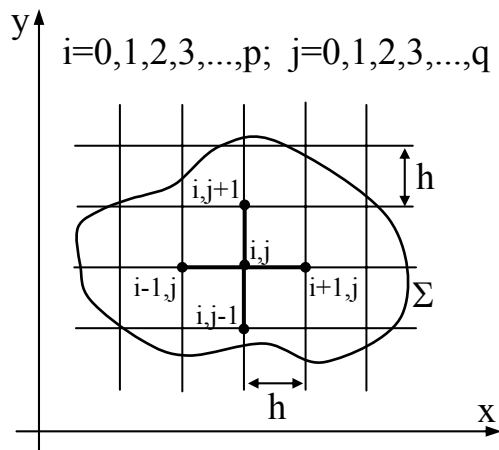


Fig. 2.52

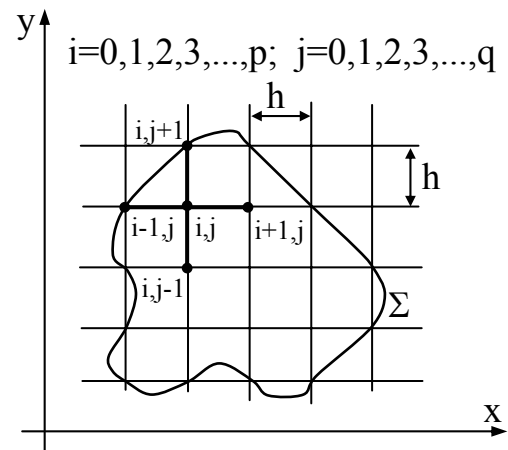


Fig. 2.53

în nodul interior (i, j) prin diferențe finite înseamnă a înlocui derivatele parțiale de ordinul al doilea din expresia laplaceanului de mai sus, pe baza relației (2.288), în funcție de valorile potențialului în nodurile vecine, prin:

$$\frac{\partial^2 V_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} (V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}); \quad (2.290)$$

$$\frac{\partial^2 V_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} (V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}). \quad (2.291)$$

Înlocuind (2.290) și (2.291) în (2.289) se obține aproximarea laplaceanului prin diferențe finite:

$$\Delta V_{i,j} = \frac{1}{h^2} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 4V_{i,j}). \quad (2.292)$$

Deci ecuația lui Poisson cu diferențe finite se scrie sub forma:

$$\frac{1}{h^2} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 4V_{i,j}) = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \Big|_{i,j} = f_{i,j}, \quad (2.293)$$

unde $f_{i,j}$ sunt numite funcții de excitații nodale.

Din ecuația (2.293) rezultă potențialul în nodul interior i,j :

$$V_{i,j} = \frac{1}{4} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}). \quad (2.294)$$

Dacă pe frontiera Σ a domeniului se cunosc valorile potențialului (condiții de tip Dirichlet), sunt posibile două situații:

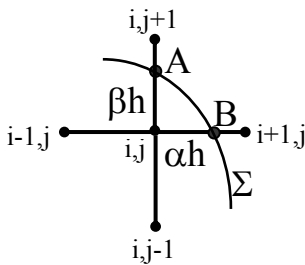


Fig. 2.54

- Frontiera intersectează rețeaua numai în noduri (fig. 2.53). În acest caz, din datele problemei sunt cunoscute valorile potențialului V în nodurile rețelei care sunt situate pe frontiera Σ a domeniului. Ca urmare, se scrie câte o ecuație de forma (2.294) pentru fiecare nod interior (care nu cade pe frontiera domeniului). Numărul ecuațiilor este egal cu numărul nodurilor interioare ale rețelei, deci este egal cu numărul necunoscutelor;

• Rețeaua de discretizare este intersectată de frontiera domeniului (fig. 2.54). În acest caz, pentru aproximarea ecuației lui Poisson, se scriu dezvoltările în serie Taylor:

$$V_B = V_{i,j} + \alpha h \frac{\partial V_{i,j}}{\partial x} + \frac{1}{2!} \alpha^2 h^2 \frac{\partial^2 V_{i,j}}{\partial x^2} + \dots \quad (2.295)$$

$$V_{i-1,j} = V_{i,j} - h \frac{\partial V_{i,j}}{\partial x} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{\partial^2 V_{i,j}}{\partial x^2} + \dots \quad (2.296)$$

$$V_A = V_{i,j} + \beta h \frac{\partial V_{i,j}}{\partial y} + \frac{1}{2!} \beta^2 h^2 \frac{\partial^2 V_{i,j}}{\partial y^2} + \dots \quad (2.297)$$

$$V_{i,j-1} = V_{i,j} - h \frac{\partial V_{i,j}}{\partial y} + \frac{1}{2!} h^2 \frac{\partial^2 V_{i,j}}{\partial y^2} + \dots, \quad (2.298)$$

unde $\alpha < 1$, $\beta < 1$.

Din relațiile (2.295) – (2.298) rezultă:

$$\frac{\partial^2 V_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{2}{\alpha(1+\alpha)h^2} (V_B + \alpha V_{i-1,j}) - \frac{2}{\alpha h^2} V_{i,j}; \quad (2.299)$$

$$\frac{\partial^2 V_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{2}{\beta(1+\beta)h^2} (V_A + \beta V_{i,j-1}) - \frac{2}{\beta h^2} V_{i,j}. \quad (2.300)$$

Prin urmare, ecuația lui Poisson cu diferențe finite are forma:

$$\frac{V_B}{\alpha(1+\alpha)} + \frac{V_{i-1,j}}{1+\alpha} + \frac{V_A}{\beta(1+\beta)} + \frac{V_{i,j-1}}{1+\beta} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) V_{i,j} = \frac{h^2}{2} f_{i,j}, \quad (2.301)$$

unde valorile V_A și V_B sunt cunoscute.

Dacă pe frontiera domeniului de calcul se prescriu condiții de tip Neumann, se procedează după cum urmează: cu un pas mic al rețelei de discretizare se poate face ca nodul $(i+1,j)$ să se afle în vecinătatea frontierei sau chiar pe frontieră. Se va considera că potențialul $V_{i+1,j}$ al nodului $(i+1,j)$ este egal cu potențialul V_N al

punctului N (fig. 2.55) în care se cunoaște valoarea derivatei după normală a potențialului:

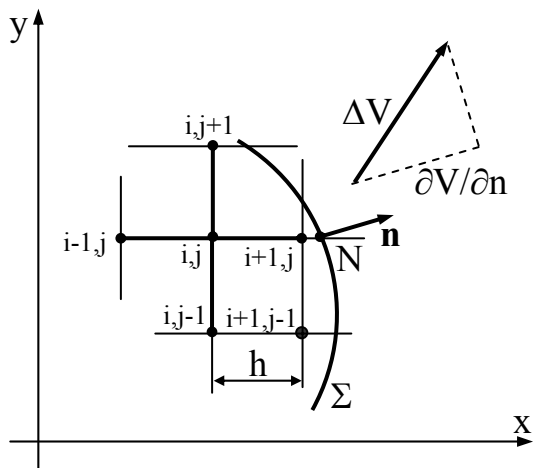


Fig. 2.55

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial n} &= \text{grad} V \mathbf{n} =, \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{u}_y \right) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.302)$$

unde $\mathbf{n} = n_x \mathbf{u}_x + n_y \mathbf{u}_y$ este versorul normalei pozitive la frontiera Σ a domeniului.

Dezvoltând funcția $V(x,y)$ în serie în jurul nodului $(i+1,j)$ și neglijând termenii superiori celor de ordinul întâi, se obține:

$$\frac{\partial V}{\partial n} \Big|_N = \left(\frac{V_N - V_{i,j}}{h} \mathbf{u}_x + \frac{V_N - V_{i+1,j-1}}{h} \mathbf{u}_y \right) \mathbf{n}. \quad (2.303)$$

Deoarece s-a considerat că $V_N = V_{i+1,j}$, relația (2.303) devine:

$$(n_x + n_y) V_{i+1,j} - n_x V_{i,j} - n_y V_{i+1,j-1} = h \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_N. \quad (2.304)$$

Pentru punctele de pe frontiera domeniului în care se dau condiții de tip Neumann se obțin relații de forma (2.304) care au o precizie mai mică decât relațiile de forma (2.301), care se obțin pentru punctele de pe frontiera domeniului în care se dau condiții de tip Dirichlet. Într-adevăr, pentru a obține relația (2.304) s-au neglijat termenii superiori celor de ordinul întâi, iar pentru a obține relațiile (2.301) s-au neglijat termenii superiori celor de ordinul al treilea.

Metoda diferențelor finite este convenabilă, în special, pentru medii liniare și omogene, dar poate fi utilizată și pentru medii neliniare și neomogene.

Prin metoda diferențelor finite se determină valorile funcției V în nodurile rețelei de discretizare a domeniului de calcul pentru care se cunosc condițiile pe frontieră de tip Dirichlet sau de tip Neumann. Pentru fiecare nod interior domeniului se obține o relație de forma (2.294). Pentru nodurile care se află pe frontiera domeniului se obțin ecuații de forma (2.301), dacă se prescriu pe frontieră condiții de tip Dirichlet, sau de forma (2.304), dacă pe frontieră se prescriu condiții de tip Neumann. În final, se obține un sistem de ecuații care conține un număr de ecuații egal cu numărul nodurilor interioare. Sistemul de ecuații astfel obținut se poate scrie sub formă matriceală:

$$[M]\{V\} = \{F\}, \quad (2.305)$$

unde: $\{V\}$ și $\{F\}$ sunt matrice coloană cu $(p-1)(q-1)$ elemente, iar $[M]$ – matrice de coeficienți,

pătrată cu dimensiunea $(p-1)(q-1) \times (p-1)(q-1)$.

Matricea coloană $\{V\}$ conține valorile nodale necunoscute V_{ij} ale potențialului, iar matricea coloană $\{F\}$ conține termenii liberi corespunzători funcțiilor de excitație nodale f_{ij} și condițiile la limită (pe frontieră), cunoscute.

Deci MDF conduce la sisteme algebrice cu un număr de ecuații egal cu numărul nodurilor rețelei de discretizare a domeniului de câmp.

Sistemele cu număr redus de ecuații se pretează la rezolvarea prin metode numerice exacte: Gauss, Choleski [9], etc. În cazul sistemelor de mari dimensiuni se utilizează metode numerice iterative (sau cu aproximații succesive): Jacobi, Gauss-Seidel, Liebmann extrapolată, iterativă a direcțiilor alternante [9], etc.

b. Metoda elementelor finite. **Problemele de analiză a câmpului electrostatic definit prin ecuații diferențiale cu condiții la limită sunt susceptibile de o formulare integrală echivalentă. Modelul matematic integral se obține aplicând modelului matematic diferențial corespunzător, metoda reziduurilor ponderate.**

Principiul metodei reziduurilor ponderate. Metoda reziduurilor ponderate este o metodă de obținere a soluțiilor aproximative pentru ecuații

diferențiale. Prin această metodă se caută o soluție a problemei pe întregul ei domeniu de analiză.

În domeniul v_{Σ} mărginit de suprafața $\Sigma = S_D \cup S_N$ considerăm problema descrisă de ecuația Poisson:

$$\Delta V(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}); \quad f(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_v(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad (2.306)$$

cu condiții pe frontieră mixte, de tip Dirichlet pe S_D și de tip Neumann pe S_N :

$$V(\mathbf{P}) = \varphi_D(\mathbf{P})|_{\mathbf{P} \in S_D}; \quad \frac{\partial V(\mathbf{P})}{\partial n} = \varphi_N(\mathbf{P})|_{\mathbf{P} \in S_N}. \quad (2.307)$$

Fie \hat{V} o soluție aproximativă a ecuației (2.306) de forma:

$$\hat{V} = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i, \quad (2.308)$$

unde α_i sunt *coeficienți de pondere* necunoscuți ce urmează a fi determinați, iar N_i reprezintă un set de funcții de interpolare liniar independente (sau funcții de formă).

Dorim ca soluția \hat{V} să fie convergentă spre soluția exactă V , pe măsură ce $n \rightarrow \infty$. Această soluție \hat{V} aproximativă se alege astfel încât să satisfacă în mod exact condițiile la limită.

Introducem soluția aproximativă \hat{V} în ecuația (2.306) care acum nu mai este satisfăcută în mod exact,

$$\Delta \hat{V}(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = R(\mathbf{r}, \alpha_i), \quad (2.309)$$

unde $R(\mathbf{r}, \alpha_i)$ este un reziduu de calcul.

Deoarece reziduuul este nul pentru soluția exactă, poate fi considerat ca o măsură a erorii de aproximare.

Metoda reziduurilor ponderate constă în determinarea coeficienților α_i astfel încât eroarea R pe întregul domeniu considerat să fie cât mai mică. Aceasta se obține prin formarea unei medii ponderate a erorii pe întregul domeniu și prin impunerea condiției:

$$\iiint_{v_{\Sigma}} R(\mathbf{r}, \alpha_i) N_i(\mathbf{r}) dv = 0, \quad (2.310)$$

unde $N_i(\mathbf{r})$ sunt funcțiile de formă.

Ținând seama de ecuația (2.309), condiția (2.310) devine:

$$\iiint_{v_{\Sigma}} [\Delta \hat{V}(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r})] N_i(\mathbf{r}) dv = 0. \quad (2.311)$$

Pe măsură ce n crește progresiv, se așteaptă ca soluția aproximativă \hat{V} să tindă spre soluția exactă V , iar reziduuul R să devină tot mai mic. La limită, când $n \rightarrow \infty$ se obține $\hat{V} \rightarrow V$, $R \rightarrow 0$, iar ecuația (2.310) este satisfăcută pentru orice set de funcții pondere $N_k(\mathbf{r})$.

În problema plan – paralelă descrisă de ecuația lui Laplace, condiția (2.311) devine:

$$\iint_{s_r} N_i \left[\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y^2} \right] dx dy = 0. \quad (2.312)$$

Se observă că:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N_i \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} \right) = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} + N_i \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(N_i \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} \right) = \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} + N_i \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y^2} \quad (2.313)$$

și, prin urmare, ecuația (2.312) se poate scrie sub forma:

$$\iint_{s_r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(N_i \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_i \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} \right) \right] dx dy - \iint_{s_r} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} \right] dx dy = 0 \quad (2.314)$$

Notând cu $P = N_i \frac{\partial \hat{V}}{\partial x}$; $Q = -N_i \frac{\partial \hat{V}}{\partial y}$ și aplicând a doua formulă a lui Green (2.248),

$$\iint_{s_r} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (Q dx + P dy), \quad (2.315)$$

ecuația (2.314) devine:

$$\int_{\Gamma} N_i \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} dy - \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} dx - \iint_{s_r} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} \right] dx dy = 0, \quad (2.316)$$

respectiv:

$$\int_{\Gamma} N_i \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} dy - \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} dx = \iint_{s_r} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} \right] dx dy. \quad (2.317)$$

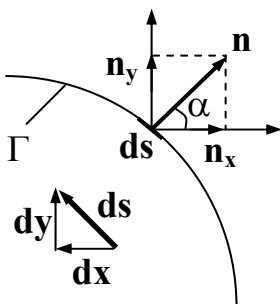


Fig. 2.56

Considerând un element de arc ds pe conturul Γ (fig. 2.56), rezultă:

$$dy = ds \cos \alpha = ds n_x; \quad -dx = ds \sin \alpha = ds n_y, \quad (2.318)$$

unde \mathbf{n} este versorul normalei:

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{u}_x + n_y \mathbf{u}_y; \quad n_x = \cos \alpha; \quad n_y = \sin \alpha. \quad (2.319)$$

Ținând seama de relațiile (2.318), membrul stâng al ecuației (2.317) devine:

$$\int_{\Gamma} N_i \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} dy - \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} dx = \int_{\Gamma} N_i \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} n_y \right) ds = \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial \hat{V}}{\partial n} ds \quad (2.320)$$

și înglobează condițiile pe frontieră de a doua speță (de tip Neumann).

Prin urmare, în problema plan – paralelă, ecuația reziduală (2.317) devine:

$$\iint_{S_r} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial \hat{V}}{\partial n} ds. \quad (2.321)$$

Principiul metodei elementelor finite. Se consideră câmpul electrostatic bidimensional, plan – paralel, în medii liniare, omogene și izotrope. Domeniul de câmp se partiționează în m subdomenii disjuncte de formă triunghiulară, numite *elemente finite* (fig. 2.57, a). Se notează cu (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_k, y_k) coordonatele vârfurilor i, j, k ale elementului finit cu numărul de ordine e , $e = 1, 2, 3, \dots, m$ (fig. 2.57, b). Potențialul electrostatic se aproximează, la nivelul fiecărui element finit (fig. 2.57, b), prin polinomul liniar:

$$V^e(x, y) = \beta_1^e + \beta_2^e x + \beta_3^e y = [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} \beta_1^e \\ \beta_2^e \\ \beta_3^e \end{Bmatrix}. \quad (2.322)$$

Coefficienții $\beta_1^e, \beta_2^e, \beta_3^e$ se determină din condiția ca planul de ecuație (2.322) să treacă prin cele trei valori nodale V_i^e, V_j^e, V_k^e ale funcției de potențial elementare.

Rezultă sistemul:

$$V_i^e = \beta_1^e + \beta_2^e x_i^e + \beta_3^e y_i^e; \quad V_j^e = \beta_1^e + \beta_2^e x_j^e + \beta_3^e y_j^e; \quad V_k^e = \beta_1^e + \beta_2^e x_k^e + \beta_3^e y_k^e. \quad (2.323)$$

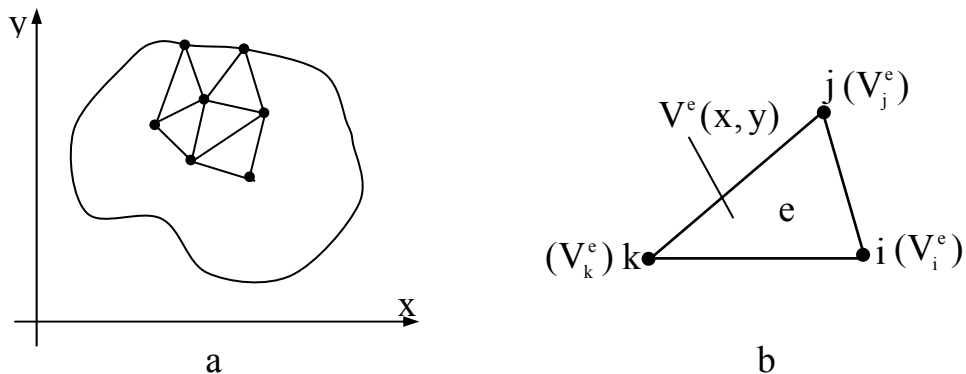


Fig. 2.57

Rezolvând sistemul de ecuații (2.323) în raport cu coeficienții $\beta_1^e, \beta_2^e, \beta_3^e$, se obține:

$$\beta_1^e = \frac{1}{2\Delta} [(x_j^e y_k^e - x_k^e y_j^e) V_i^e + (x_k^e y_i^e - x_i^e y_k^e) V_j^e + (x_i^e y_j^e - x_j^e y_i^e) V_k^e]; \quad (2.324)$$

$$\beta_2^e = \frac{1}{2\Delta} [(y_j^e - y_k^e) V_i^e + (y_k^e - y_i^e) V_j^e + (y_i^e - y_j^e) V_k^e]; \quad (2.325)$$

$$\beta_3^e = \frac{1}{2\Delta} [(x_k^e - x_j^e) V_i^e + (x_i^e - x_k^e) V_j^e + (x_j^e - x_i^e) V_k^e], \quad (2.326)$$

unde $2\Delta = \begin{bmatrix} 1 & x_i^e & y_i^e \\ 1 & x_j^e & y_j^e \\ 1 & x_k^e & y_k^e \end{bmatrix}$ este dublul ariei triunghiului cu numărul de ordine e.

Înlocuind expresiile coeficienților $\beta_1^e, \beta_2^e, \beta_3^e$ în relația (2.322), se obține:

$$\begin{aligned} V^e(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} [x_j^e y_k^e - x_k^e y_j^e + (y_j^e - y_k^e)x + (x_k^e - x_j^e)y] V_i^e + \\ &+ \frac{1}{2\Delta} [x_k^e y_i^e - x_i^e y_k^e + (y_k^e - y_i^e)x + (x_i^e - x_k^e)y] V_j^e + \\ &+ \frac{1}{2\Delta} [x_i^e y_j^e - x_j^e y_i^e + (y_i^e - y_j^e)x + (x_j^e - x_i^e)y] V_k^e, \end{aligned} \quad (2.327)$$

sau:

$$\begin{aligned} V^e(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} [a_i^e + b_i^e x + c_i^e y] V_i^e + \frac{1}{2\Delta} [a_j^e + b_j^e x + c_j^e y] V_j^e + \\ &+ \frac{1}{2\Delta} [a_k^e + b_k^e x + c_k^e y] V_k^e, \end{aligned} \quad (2.328)$$

unde:

$$a_i^e = x_j^e y_k^e - x_k^e y_j^e; \quad a_j^e = x_k^e y_i^e - x_i^e y_k^e; \quad a_k^e = x_i^e y_j^e - x_j^e y_i^e;$$

$$\mathbf{b}_i^e = y_j^e - y_k^e; \quad \mathbf{b}_j^e = y_k^e - y_i^e; \quad \mathbf{b}_k^e = y_i^e - y_j^e; \quad (2.329)$$

$$\mathbf{c}_i^e = x_k^e - x_j^e; \quad \mathbf{c}_j^e = x_i^e - x_k^e; \quad \mathbf{c}_k^e = x_j^e - x_i^e.$$

Introducând notațiile:

$$N_i^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_i^e + b_i^e x + c_i^e y); \quad N_j^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_j^e + b_j^e x + c_j^e y); \quad (2.330)$$

$$N_k^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_k^e + b_k^e x + c_k^e y),$$

relația (2.328) devine:

$$V^e(x, y) = N_i^e(x, y)V_i^e + N_j^e(x, y)V_j^e + N_k^e(x, y)V_k^e, \quad (2.331)$$

respectiv matriceal:

$$V^e(x, y) = \begin{bmatrix} N_i^e(x, y) & N_j^e(x, y) & N_k^e(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i^e \\ V_j^e \\ V_k^e \end{Bmatrix} = [N]^e \{V\}^e, \quad (2.332)$$

unde $N_i^e(x, y)$, $N_j^e(x, y)$, $N_k^e(x, y)$ reprezintă funcțiile de formă corespunzătoare elementului finit triunghiular cu numărul de ordine e .

Obținerea ecuațiilor cu elemente finite prin metoda reziduurilor ponderate. La nivelul fiecărui element finit, introducând funcția de aproximare (2.332) în ecuația (2.321) și se obține:

$$\iint_{S_{r^e}} \left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial [N]^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial [N]^e}{\partial y} \right) dx dy \right] \{V\}^e = \int_{\Gamma^e} N_i \frac{\partial V^e}{\partial n} dl, \quad (2.333)$$

unde Γ^e reprezintă conturul elementului finit cu numărul de ordine e .

Considerând pe rând indicii $i = i, j, k$ se obține un sistem de 3 ecuații care se poate scrie sub formă matriceală (la nivelul unui element finit):

$$[K^e] \{V\}^e = \{F\}^e, \quad (2.334)$$

unde: $[K^e]$ este matrice de coeficienți pătrată; $\{V\}^e$ - matricea coloană a necunoscutelor; $\{F\}^e$ - matricea coloană a termenilor liberi care conține informații referitoare la condițiile pe frontieră.

Asamblarea elementelor finite pe întreg domeniul de analiză conduce în final la ecuația matriceală:

$$[K]\{V\}=\{F\}. \quad (2.335)$$

Sistemul de ecuații (2.335) se rezolvă prin metode iterative [9].